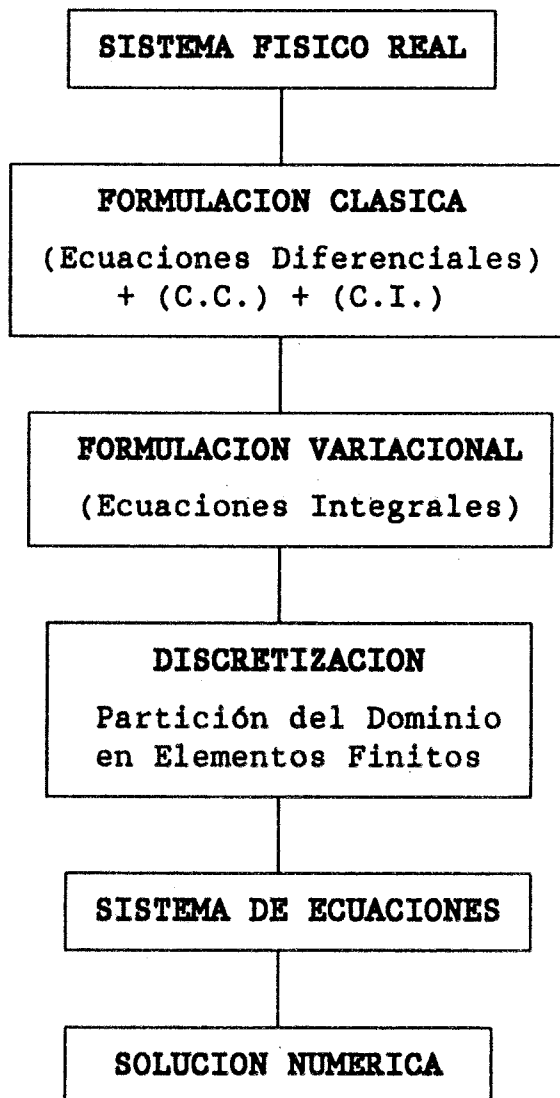


*** ETAPAS FUNDAMENTALES DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ***



* FORMULACION ABSTRACTA DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS *

* FORMULACION CLASICA:

Hallar $u \in X$ en Ω tal que:

$$\begin{aligned} Au &= f \\ + \text{C.C.} \\ + \text{C.I.} \end{aligned}$$

* FORMULACION VARIACIONAL:

Hallar $u \in X'$ en Ω tal que:

$$\int_{\Omega} (Au) v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in X'$$

6

$$a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in X'$$

* FORMULACION EN DIMENSION FINITA:

Hallar $u_h \in X'_h \subset X'$ en Ω tal que:

$$a(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in X'_h$$

Tomando una base de X'_h ; $\{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \}$,

$$a(u_h, \varphi_j) = b(\varphi_j) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Siendo $u_h = \sum_{i=1}^n u_h^i \varphi_i$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n u_h^i a(\varphi_i, \varphi_j) = b(\varphi_j) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Resultando el sistema de ecuaciones:

$$A u_h = f$$

siendo,

$$(A)_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

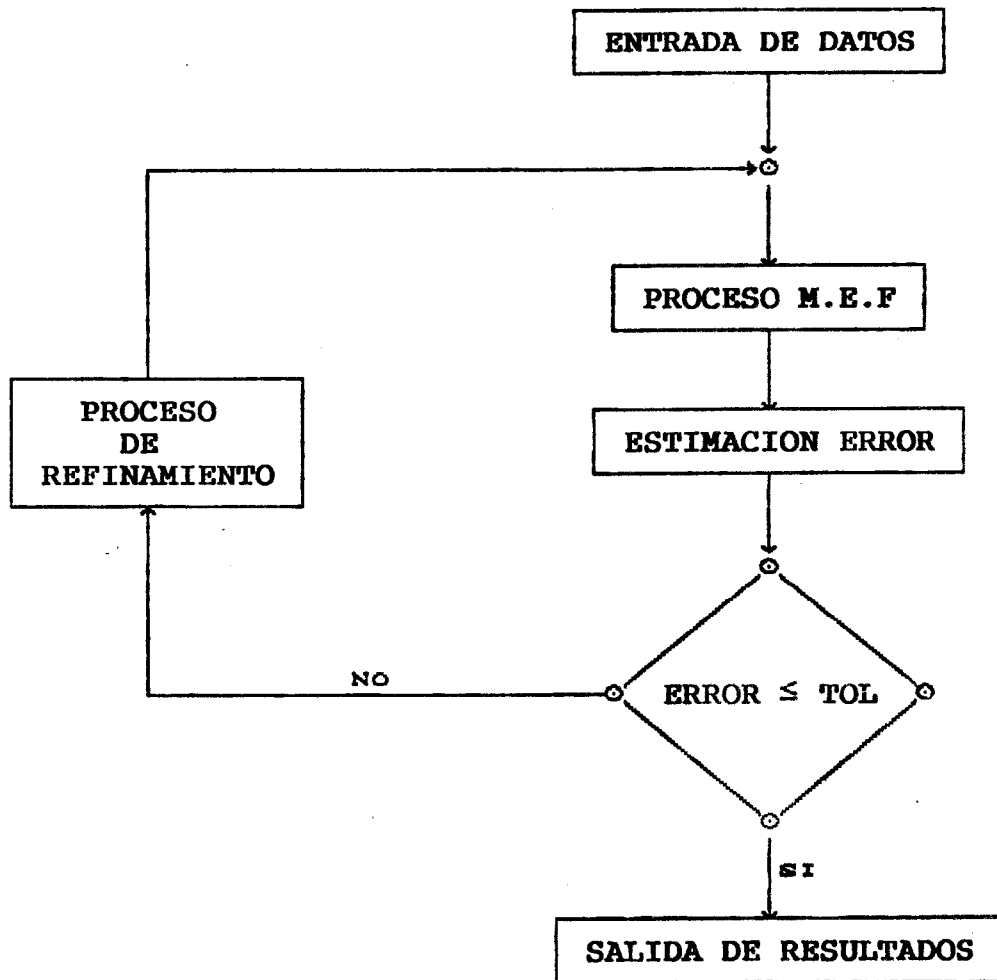
$$u_h = \begin{bmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \\ \vdots \\ u_h^n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} b(\varphi_1) \\ b(\varphi_2) \\ \vdots \\ b(\varphi_n) \end{bmatrix}$$

* ERROR DEL METODO:

$$\| e \| = \| u - u_h \| \leq C h^\alpha$$

*** INTRODUCCION ***

*** ORGANIGRAMA GENERAL DE UN CODIGO ADAPTATIVO ***



* PROBLEMA PLANTEADO EN 1-D *

$$-\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + v(x)\frac{du(x)}{dx} + b(x)u(x) = f(x) \quad \text{en } \Omega=(a,b)$$

CONDICIONES DE CONTORNO

$$u(a) = u_a$$

$$u(b) = u_b$$

$$K(a)\frac{du(a)}{dx} = \sigma_a$$

$$-K(b)\frac{du(b)}{dx} = \sigma_b$$

$$K(a)\frac{du(a)}{dx} = p_a[u(a)-u_a]$$

$$-K(b)\frac{du(b)}{dx} = p_b[u(b)-u_b]$$

* ESTIMACION E INDICACION DEL ERROR *

ESTIMACION DEL ERROR

$$\|e\|_{\Sigma}^2 \approx \|e_o\|_{\Sigma}^2 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{12 K_{\min}} \int_{\Omega_i} r^2 dx$$

RESIDUO DE LA ECUACION

$$r(x) = - \frac{d}{dx} \left[K(x) \frac{du_h(x)}{dx} \right] + v(x) \frac{du_h(x)}{dx} + b(x)u_h(x) - f(x)$$

INDICADORES DE ERROR

$$\varepsilon_i = \left[\frac{h_i^2}{12 K_{\min}} \int_{\Omega_i} r^2 dx \right]^{1/2}$$

COEFICIENTE DE EFECTIVIDAD DE LA ESTIMACION

$$\theta = \frac{\|e_o\|_{\Sigma}}{\|e\|_{\Sigma}}$$

* Propiedades:

a) $\theta \geq 1$

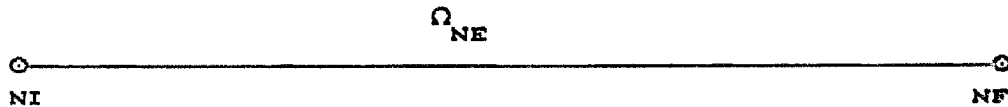
b) $\theta \rightarrow 1$ cuando $h_i \rightarrow 0$

* ESTRATEGIAS DE REFINAMIENTO *

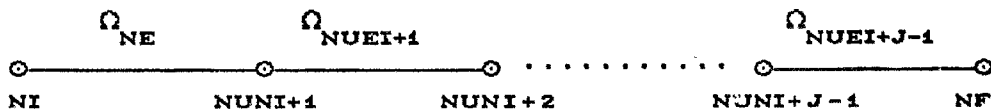
- a) ¿ Qué elementos se van a refinar ?.
- b) ¿Cuál es el grado de refinamiento máximo ?.
- c) ¿Cuál es el grado de refinamiento de cada elemento ?.

REFINAMIENTO DE UN ELEMENTO GENERICO EN J SUBELEMENTOS

* Malla M_n :



* Malla M_{n+1} :



- 1º) Definición del subelemento extremo izquierdo de Ω_{NE} .
- 2º) Definición del los subelementos interiores de Ω_{NE} .
- 3º) Definición del subelemento extremo derecho de Ω_{NE} .

* APLICACIONES NUMERICAS EN 1-D *

PROBLEMA I: DIFUSIÓN PURA

$$- \left[\left[\frac{1}{\alpha} + \alpha(x-\beta)^2 \right] u' \right]' = 2 \left[1 + \alpha(x-\beta) \left[\arctg \alpha(x-\beta) + \arctg \alpha\beta \right] \right]$$

para $x \in (0,1)$, y con condiciones de Dirichlet:

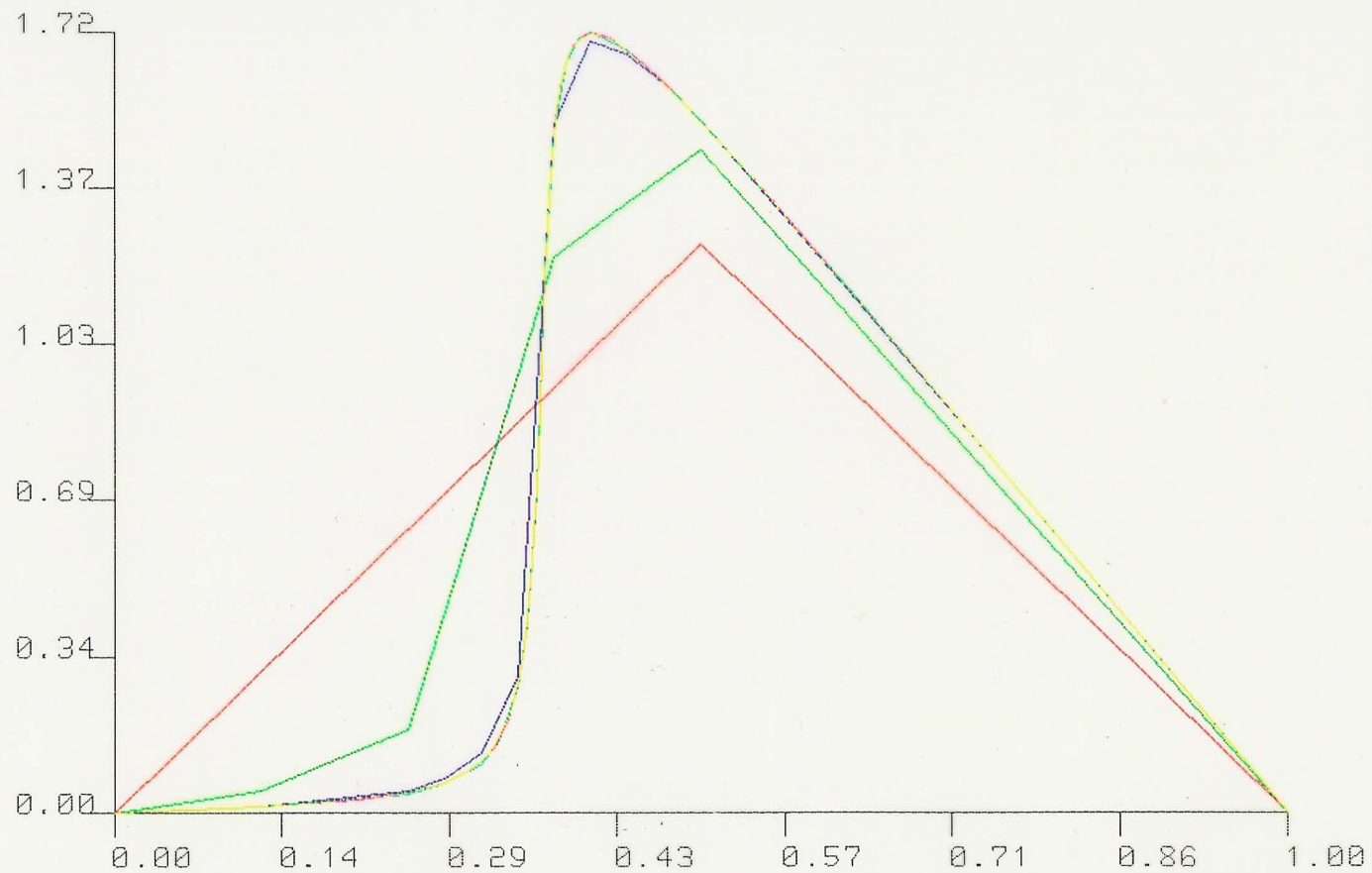
$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

cuya solución exacta es:

$$u(x) = (1-x) \left[\arctg \alpha(x-\beta) + \arctg \alpha\beta \right]$$

Trabajamos con $\alpha = 100$ y $\beta = 0.36388$

C: 4,1,4,2,0.01,0.1



--- : I0: 3 NODOS
--- : I1: 6 NODOS
--- : I2: 13 NODOS
--- : I3: 20 NODOS

--- : I4: 55 NODOS [AD-FFL]
--- : SOL. EXACT.

PROBLEMA II: CONVECCIÓN-DIFUSIÓN HOMOGÉNEO

$$-\varepsilon u'' + u' = 0 \quad \text{para } x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

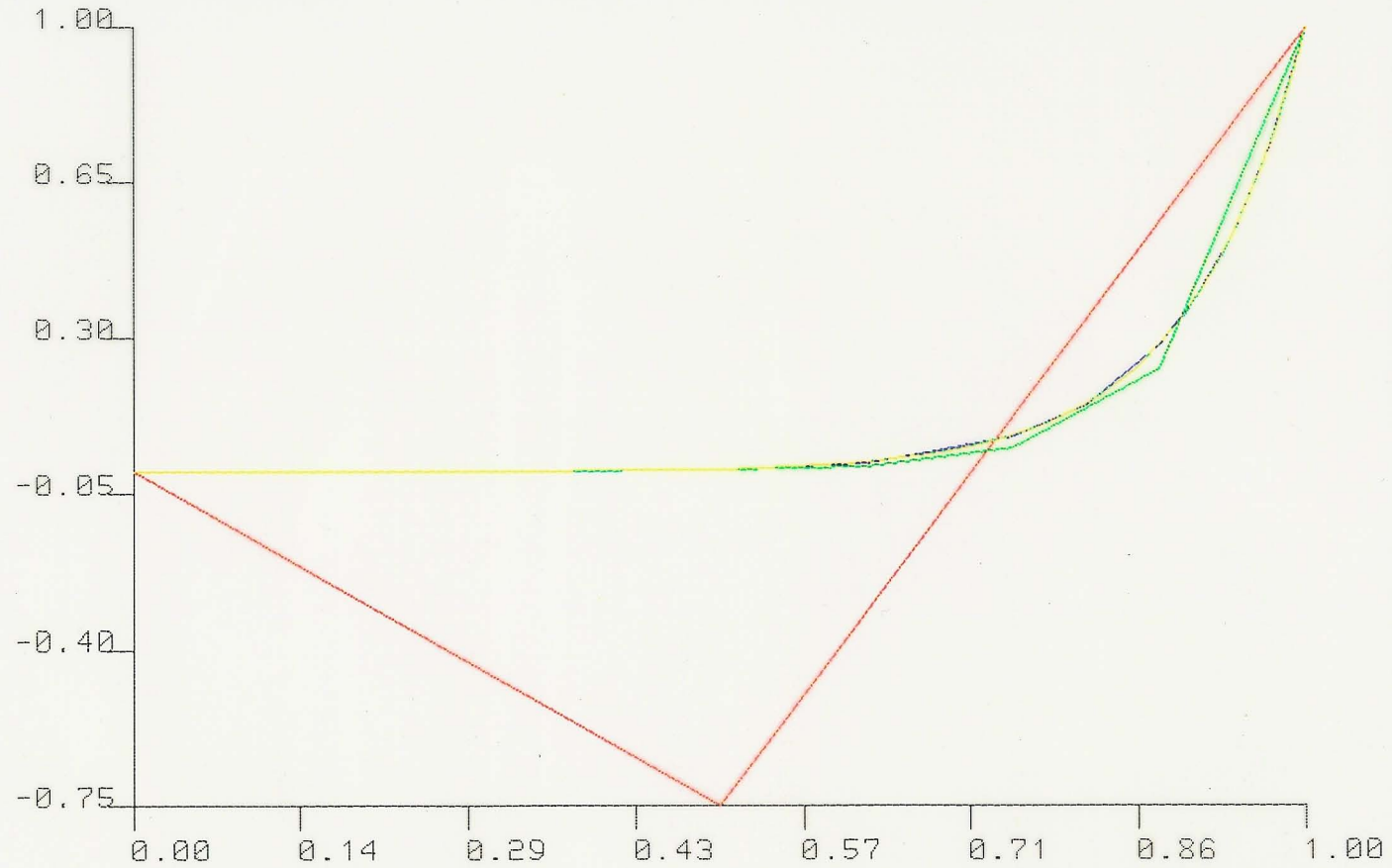
La solución exacta de este problema es:

$$u(x) = \frac{1 - e^{x/\varepsilon}}{1 - e^{1/\varepsilon}}$$

* Problema II.a.- ($\varepsilon = 0.1$) *

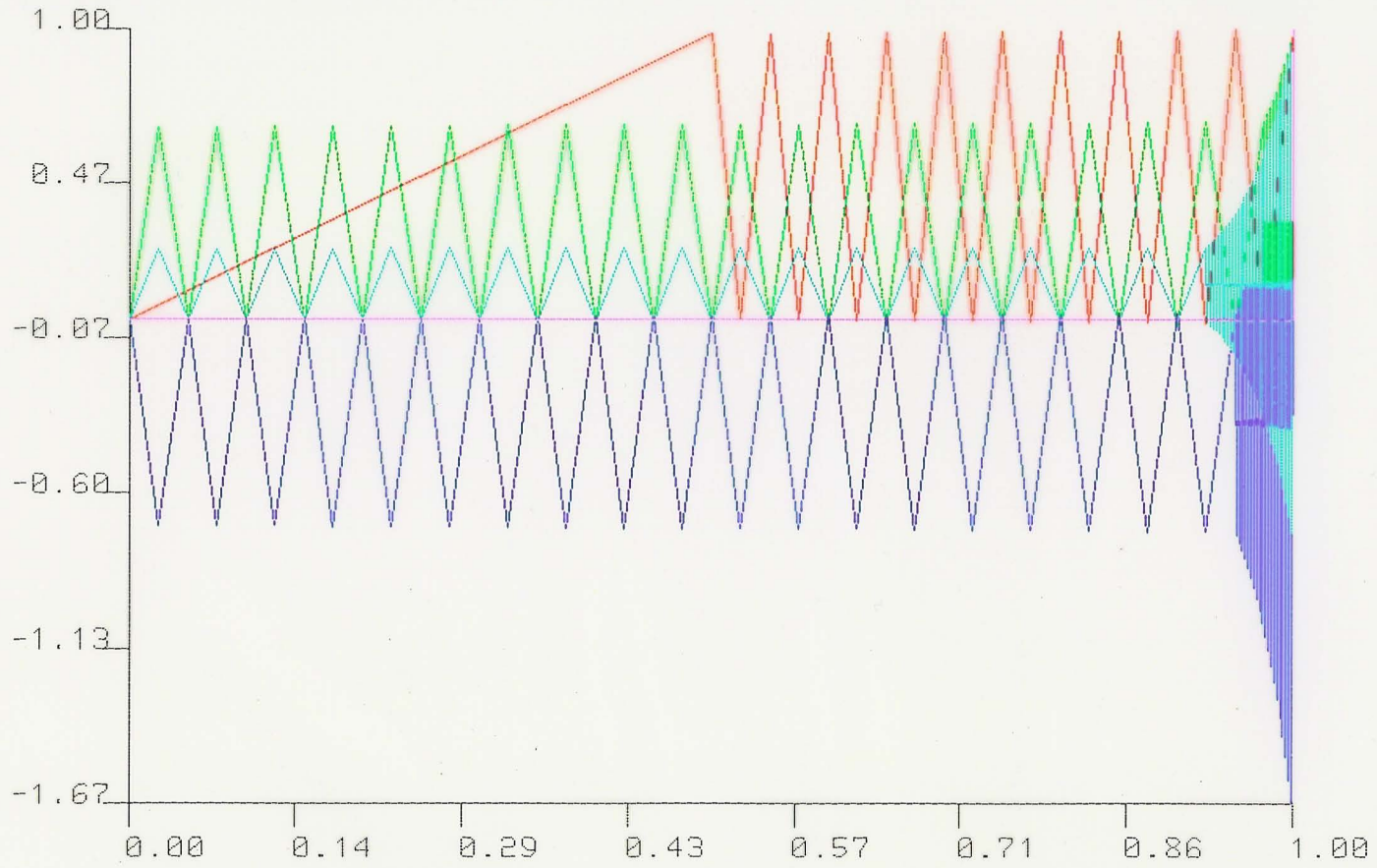
* Problema II.b.- ($\varepsilon = 10^{-5}$) *

C: 4,1,4,2,0.01,0.1



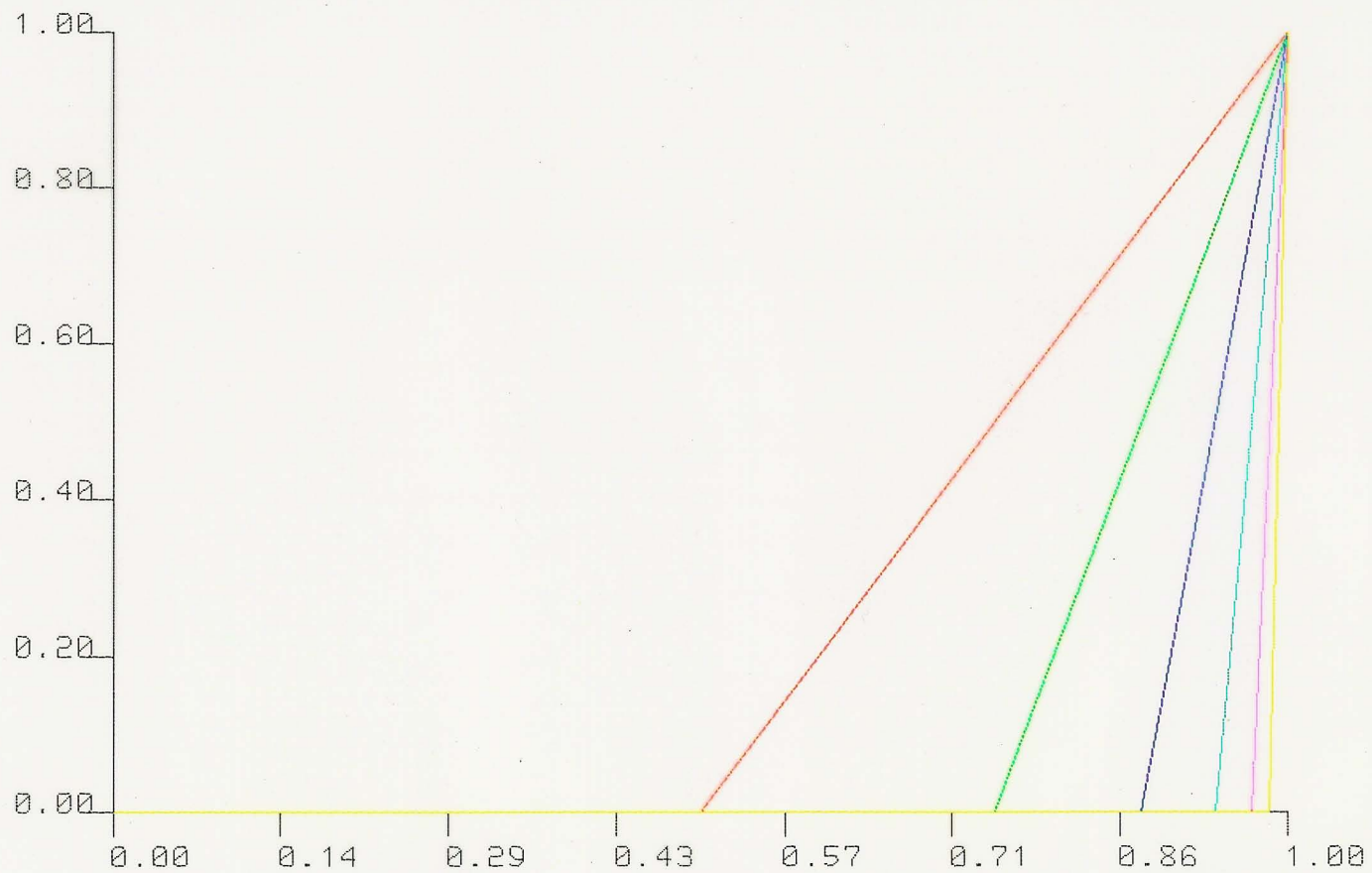
- : I0: 3 NODOS
- : I1: 8 NODOS
- : I2: 12 NODOS
- : I3: 28 NODOS
- : I4: 81 NODOS [AD-FFL]
- : SOL. EXACT.

C: 4,1,20,1,0.1,1.



— : I1: 22 NODOS
— : I3: 60 NODOS
— : I4: 79 NODOS
— : I5: 98 NODOS
— : I7: 136 NODOS [AD-FFL]

C: 3,2,4,2,0.1,0



--- : C0: 3 NODOS
--- : C1: 4 NODOS
--- : C2: 5 NODOS
--- : C3: 6 NODOS

--- : C4: 7 NODOS
--- : C5: 8 NODOS

[AD-DA]

PROBLEMA III: CONVECCIÓN-DESIÓN NO HOMOGÉNEO

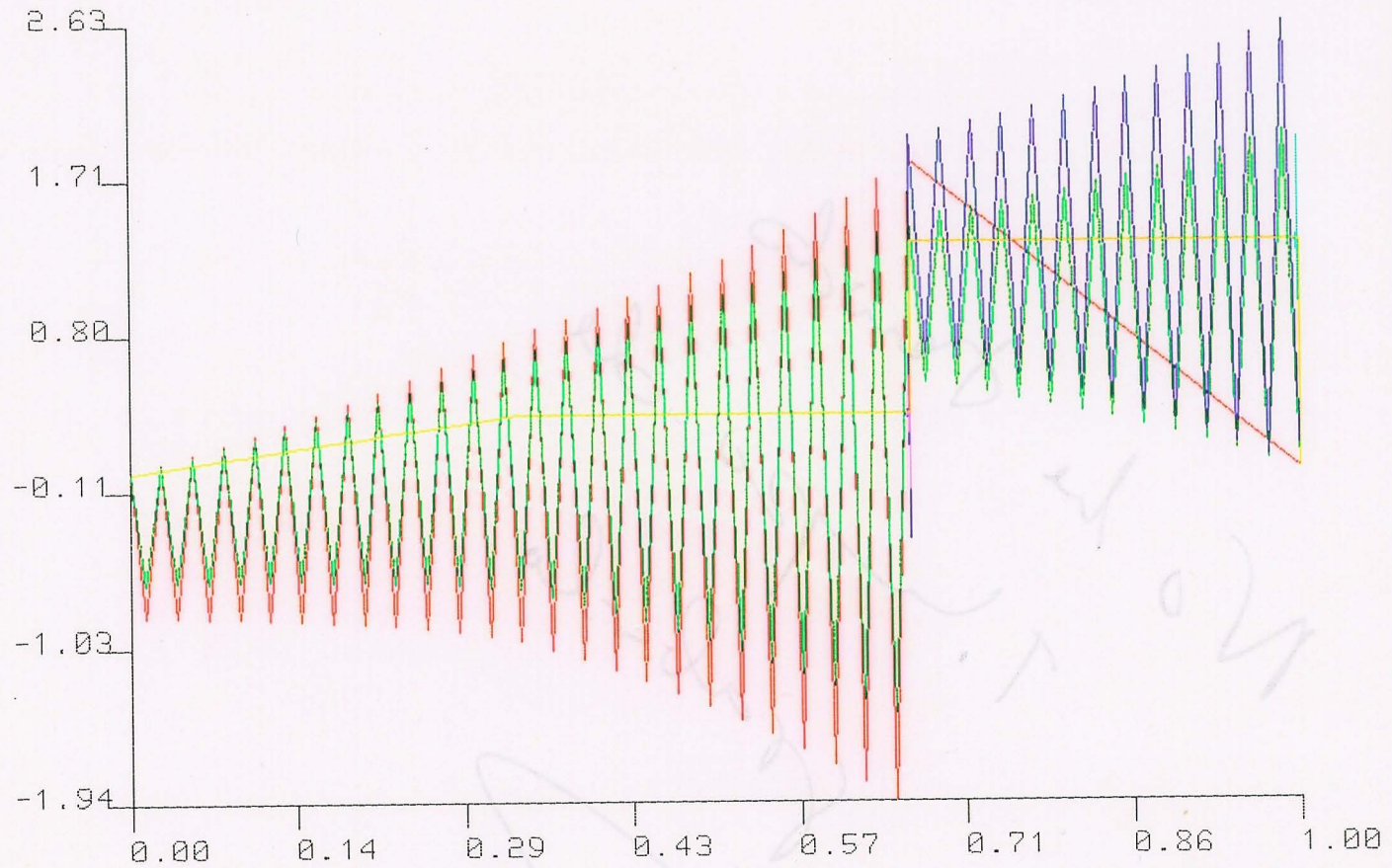
$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Tomando:

$$\epsilon = 0.0001$$

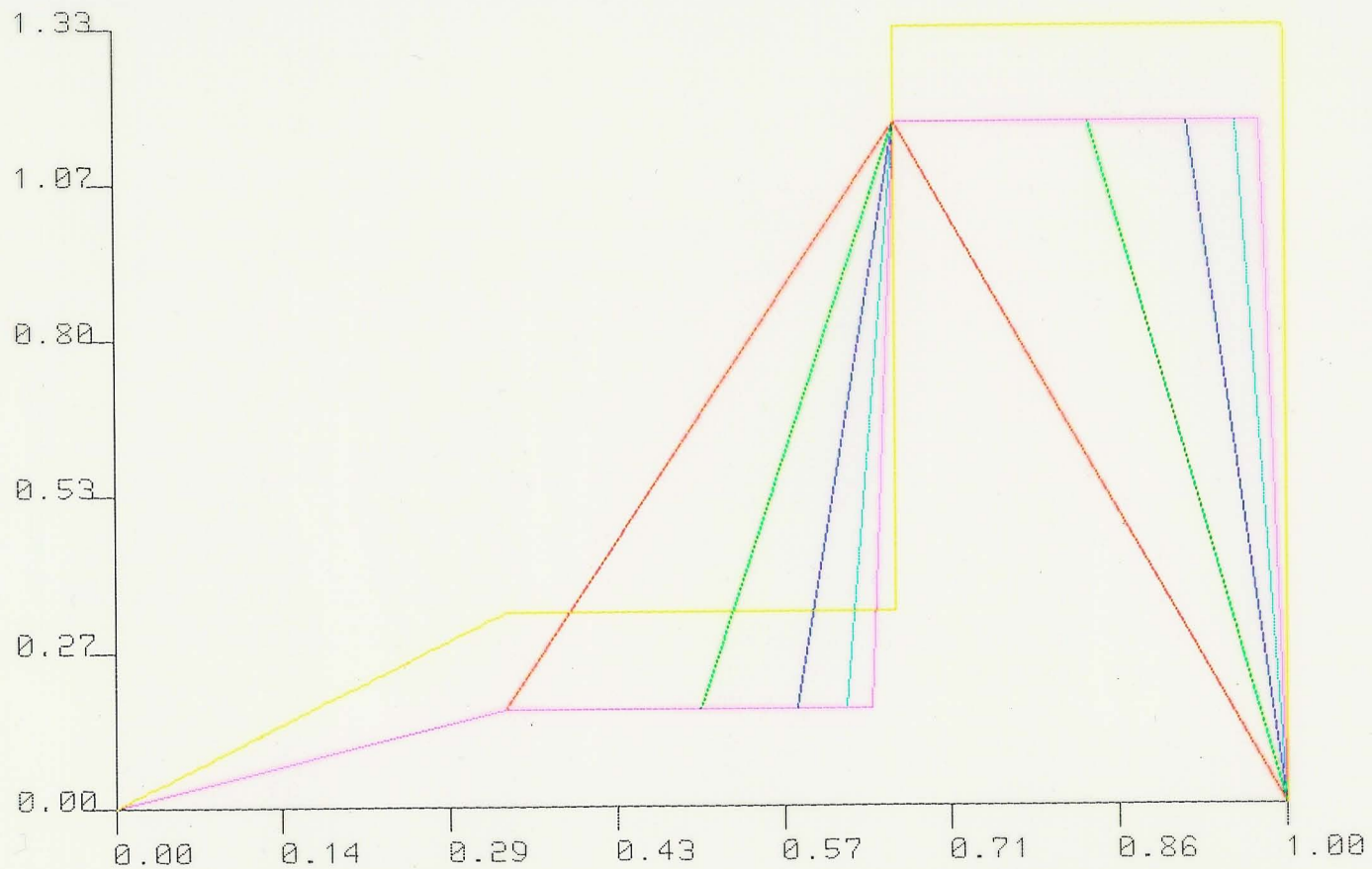
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ; } x \neq \frac{2}{3} \\ \epsilon \left(x - \frac{2}{3}\right) & \text{si } x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

C: 4,1,25,1,0.1,1.



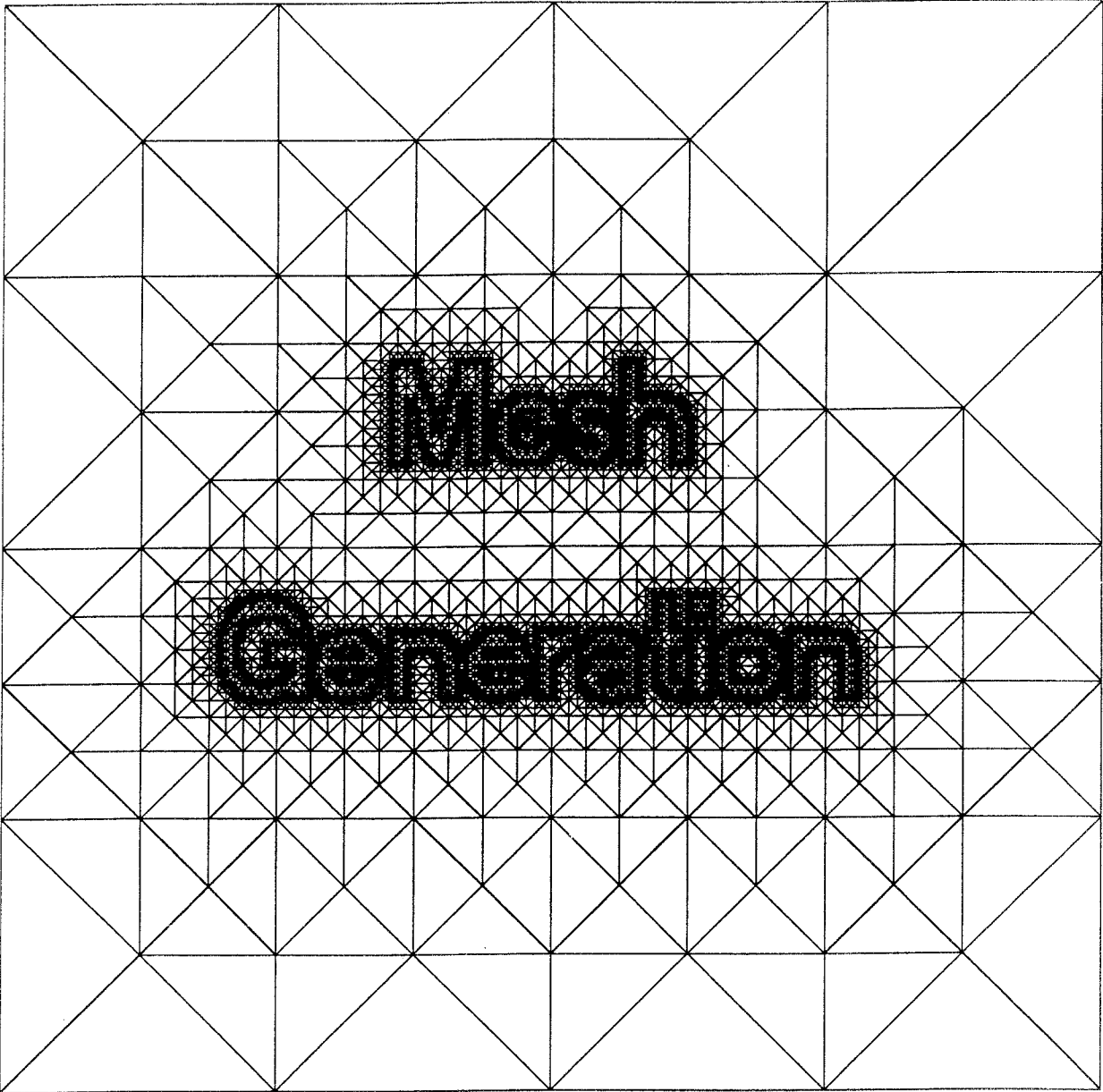
--- : I2: 52 NODOS
--- : I3: 76 NODOS
--- : I4: 100 NODOS
--- : I5: 124 NODOS
--- : I6: 148 NODOS [AD-FFL]
--- : I7: 172 NODOS

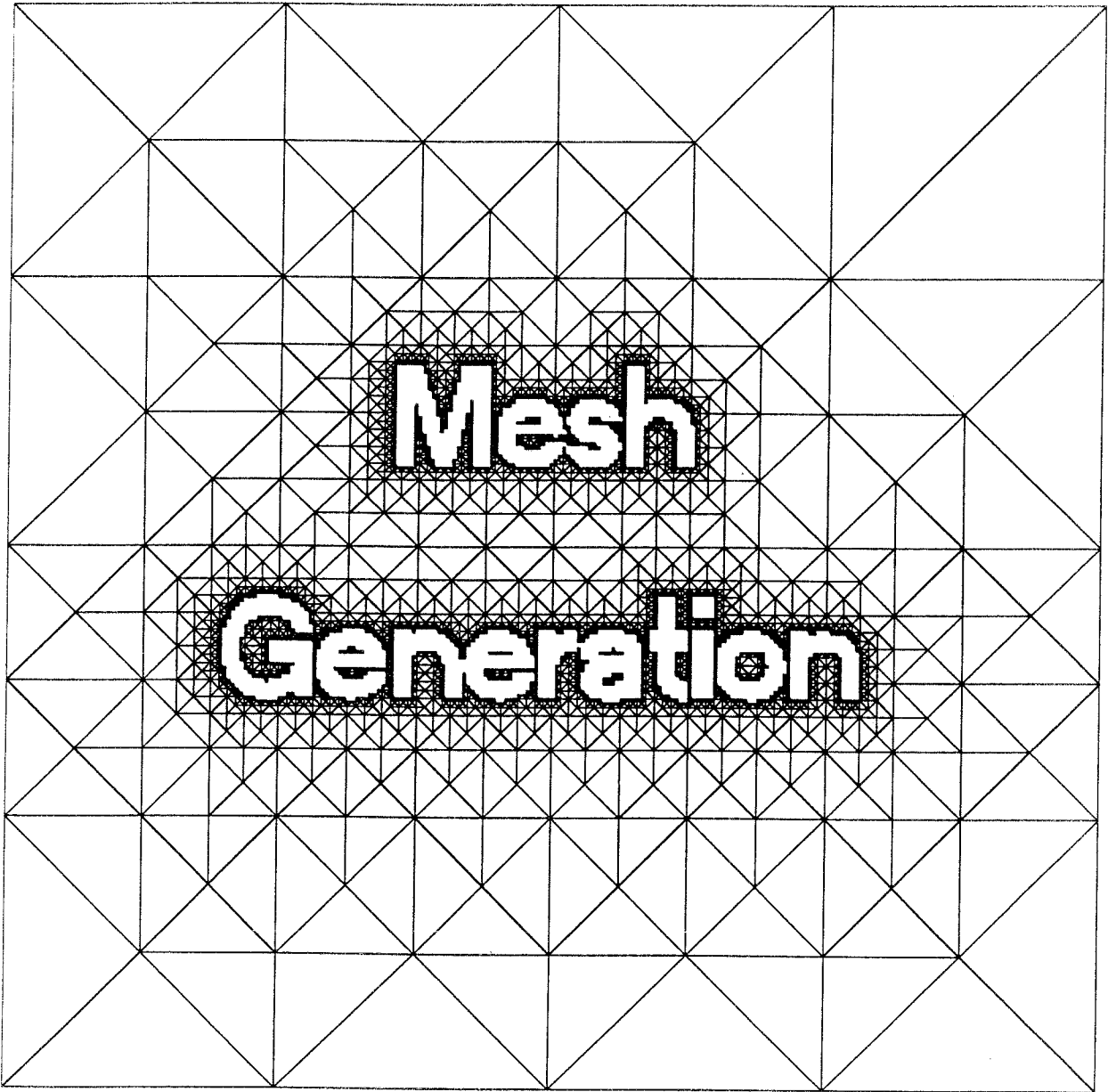
C: 3,2,4,2,0.1,0.



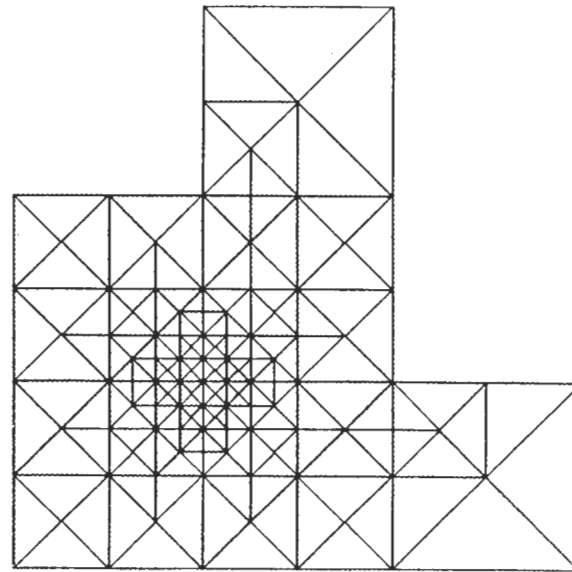
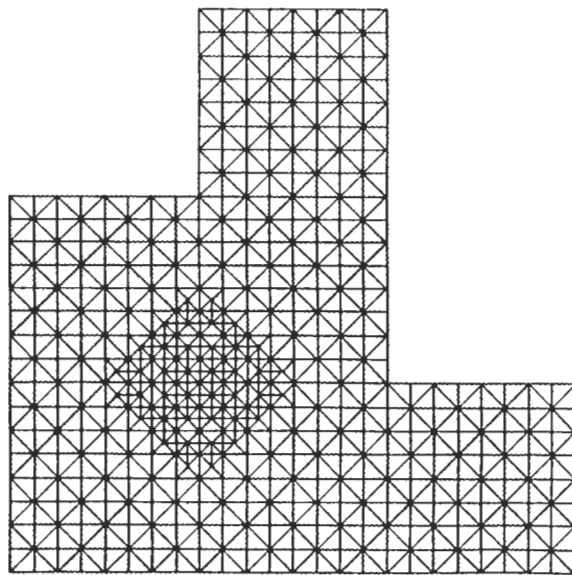
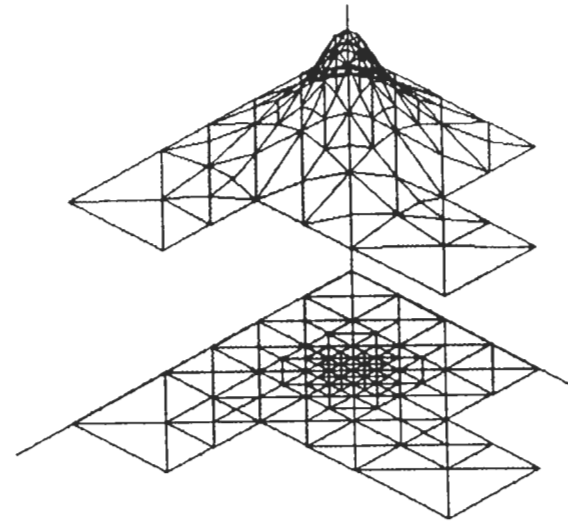
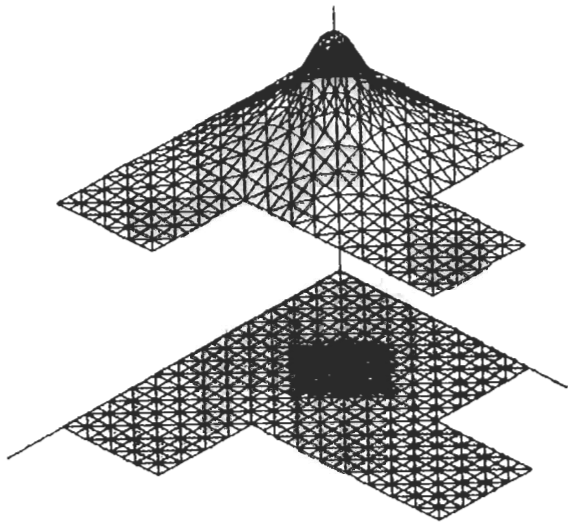
— : I0: 4 NODOS
— : I1: 6 NODOS
— : I2: 8 NODOS
— : I3: 10 NODOS

— : I4: 12 NODOS [AD-DA]
— : I24: 420 NODOS

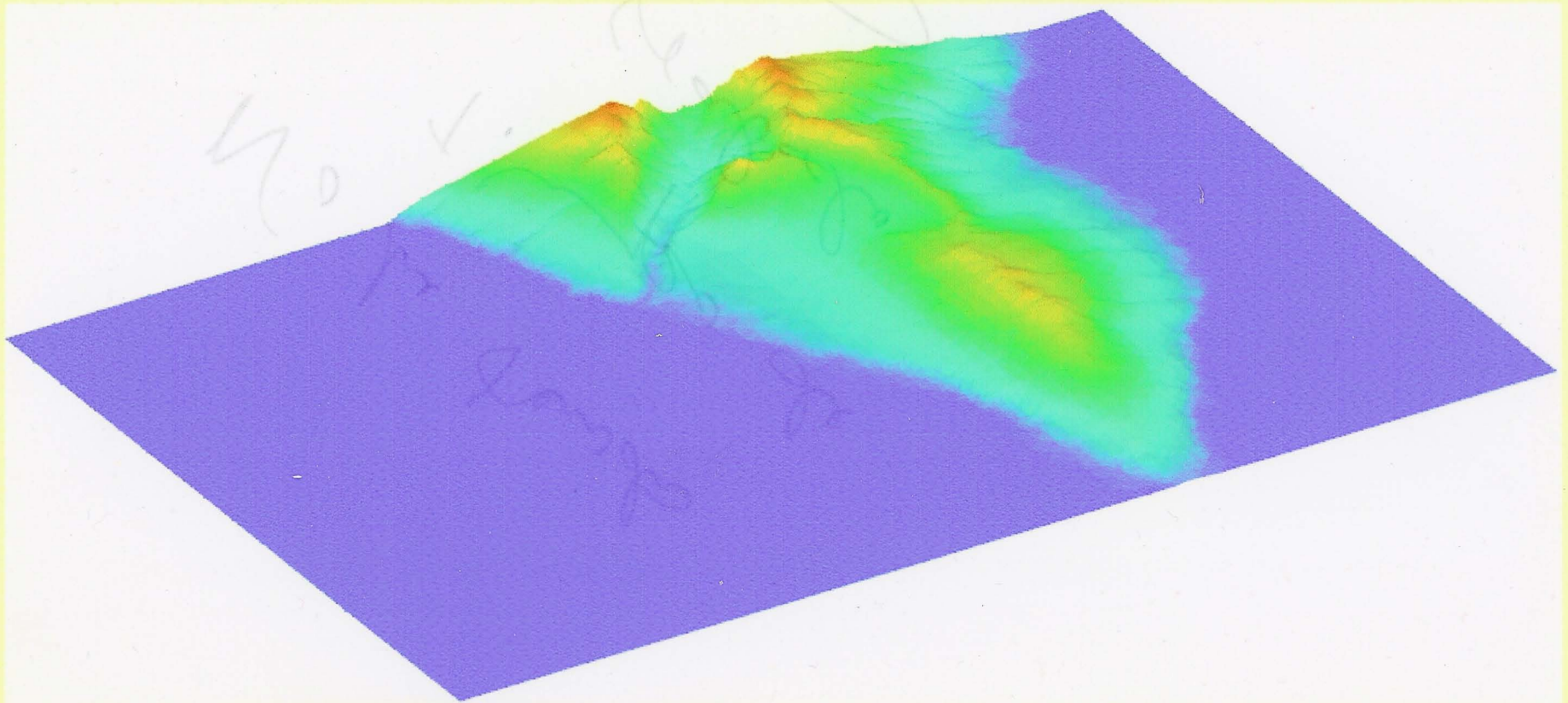




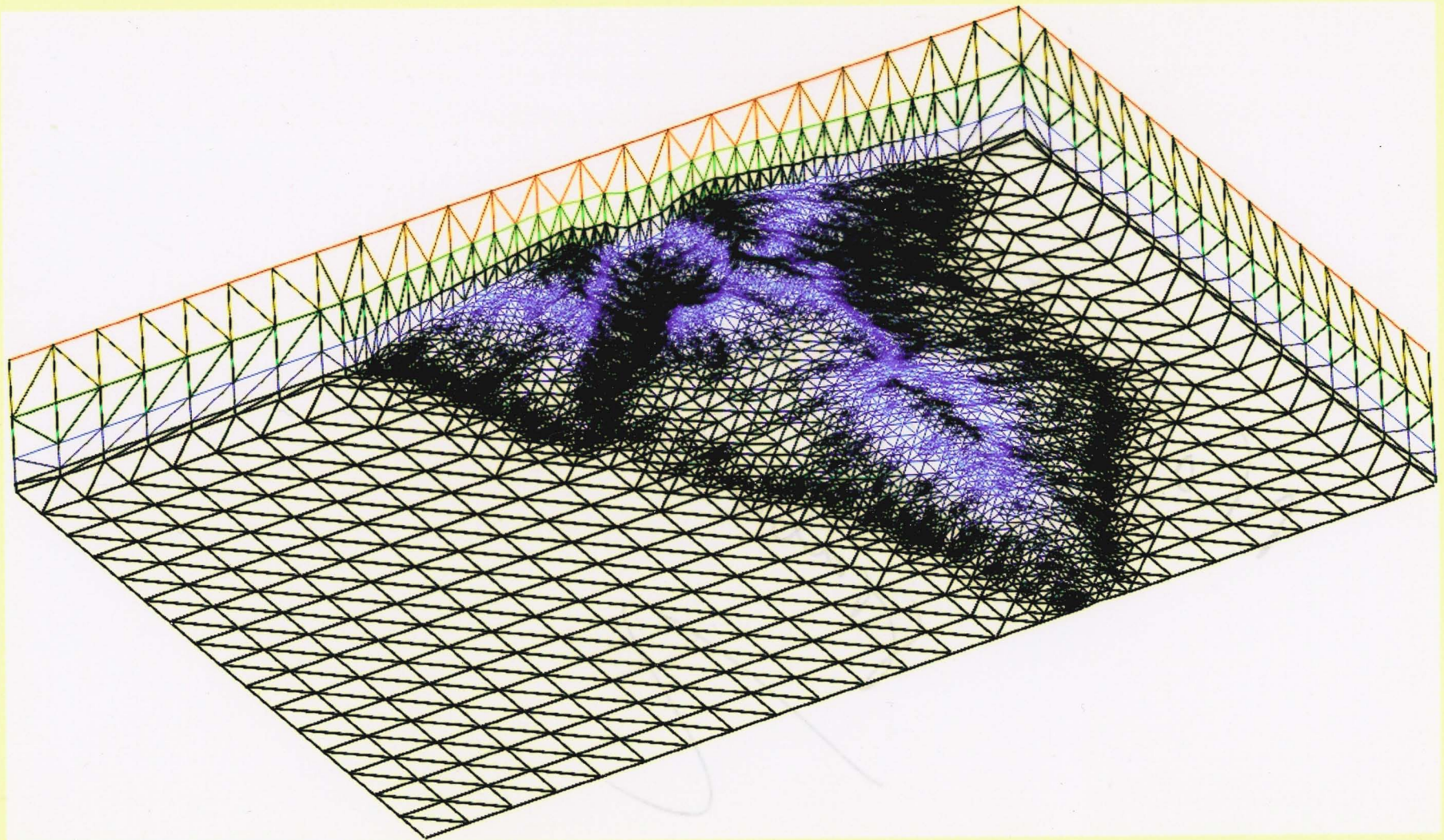
Mesh Generation



Introducción



Introducción



CONTRIBUCIÓN EN GENERACIÓN DE MALLAS NO ESTRUCTURADAS PARA EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

1.- INTRODUCCIÓN.

2.- PROCESO DE REFINAMIENTO/DESREFINAMIENTO.

2.1.- Aspectos generales.

2.2.- Definiciones, propiedades y estructura de datos.

2.3.- El algoritmo de desrefinamiento.

3.- PROBLEMA DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN.

3.1.- Formulación semi-implícita.

3.2.- Estabilidad.

3.3.- Consistencia.

3.4.- Estrategia adaptable.

4.- RESULTADOS NUMÉRICOS EN 2-D.

4.1.- Un problema de convección-difusión.

4.2.- Un problema quasi-estacionario.

4.3.- Un problema estacionario.

4.4.- Aproximación de una imagen bidimensional.

5.- DIAGRAMA DE VORONOI Y TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY.

5.1.- Algoritmo incremental para construir la triangulación de Delaunay.

5.2.- Problemas debidos a errores de redondeo.

5.3.- Construcción de $D(X_{i+1})$.

5.3.1.- Búsqueda del núcleo.

5.3.2.- Formación de D_1^i .

5.3.3.- Formación de D_2^i .

6.- APLICACIONES DEL GENERADOR DE MALLAS EN 3-D.

7.- CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS.

8.- REFERENCIAS.

Ecuaciones en Derivadas Parciales

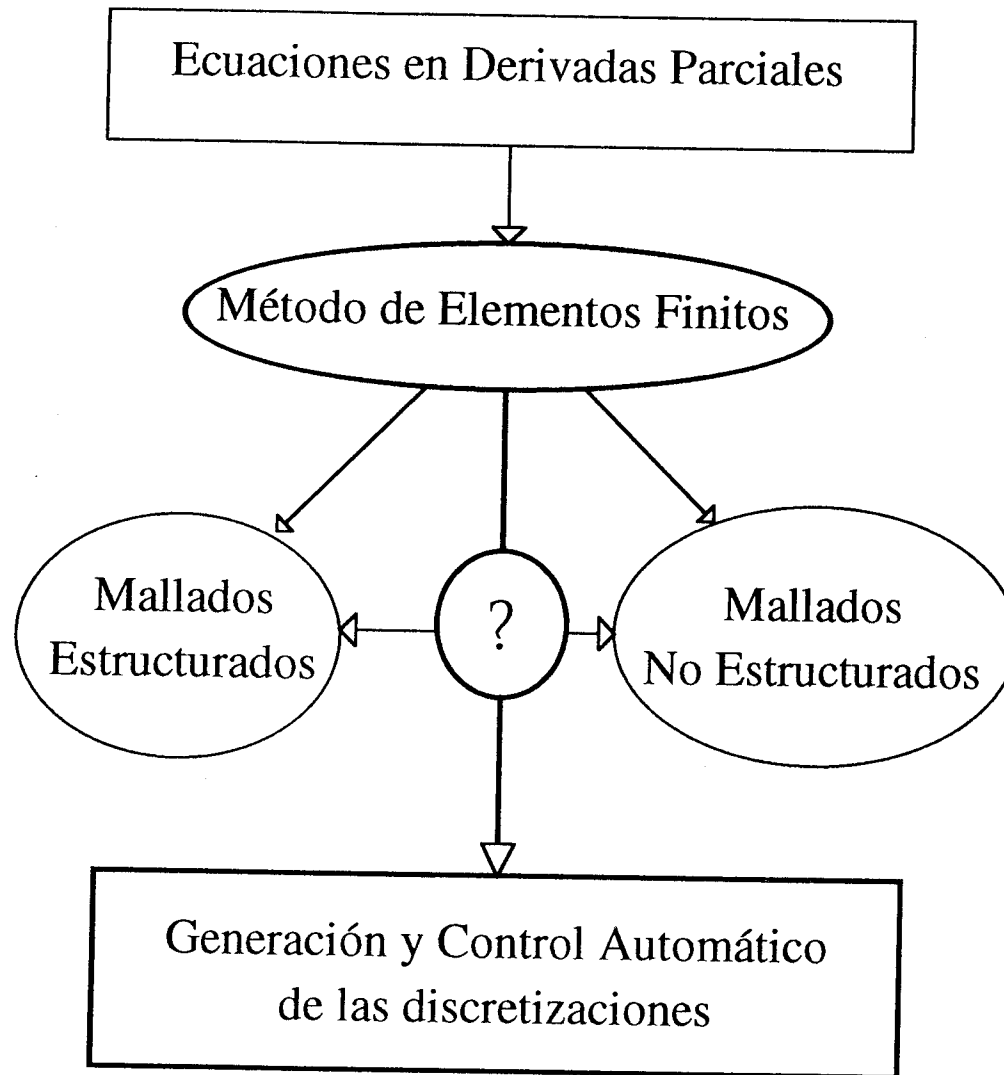
Método de Elementos Finitos

Mallados
Estructurados

?

Mallados
No Estructurados

Generación y Control Automático
de las discretizaciones



Nociones generales

Definición: Malla.

Una malla *conforme* de un poliedro $\Omega \subset E^d$ es un conjunto finito de poliedros $\{\Pi_i, 1 \leq i \leq n\}$ que verifica:

$$1. \quad \Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Pi_i;$$

$$2. \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \text{ o una } k\text{-cara común a ambos poliedros, } 1 \leq i \neq j \leq n, 0 \leq k \leq d - 1. \quad \square$$

En esta definición la palabra *conforme* se emplea para indicar que no puede haber una intersección entre poliedros que no sea uno de sus vértices, aristas, etc.

Definición: Triangulación.

Una triangulación es una malla en la que todos los poliedros que la forman son símlices (triángulos en dimensión dos, tetraedros en dimensión tres, etc.).

Características geométricas deseables en una malla

Para la aplicación del M.E.F son deseables las siguientes características geométricas:

- La adaptación a la forma del dominio debe ser lo mejor posible.
- La variación en el tamaño de elementos adyacentes debe ser progresiva.
- La densidad de elementos en determinadas zonas del dominio debe ser mayor (por ejemplo, donde el gradiente de la solución sea elevado, donde la geometría sea más compleja, etc.).
- La forma de los elementos debe ser adecuada. Por ejemplo, en el caso de una triangulación, los símlices deben ser lo más regulares posible; algunas medidas de la regularidad o *calidad* de un 3-símlice (tetraedro), son: $\frac{vol(b_k)}{vol(K)}$, $\frac{vol(b_k)}{vol(B_k)}$, $\frac{rad(b_k)}{diam(K)}$, ..., donde b_k y B_k son las esferas inscrita y circunscrita al tetraedro K . En ningún caso es admisible que existan elementos *degenerados*, es decir, cuya medida de calidad sea nula o *casi* nula.

Clasificación de las mallas

Estructuradas

La conexión entre elementos obedece a un patrón fijo; el número de nodos vecinos a uno dado es siempre el mismo.

Ventajas: Son más simples, más convenientes para su uso en el método de diferencias finitas y requieren menos cantidad de memoria para su almacenamiento en el ordenador.

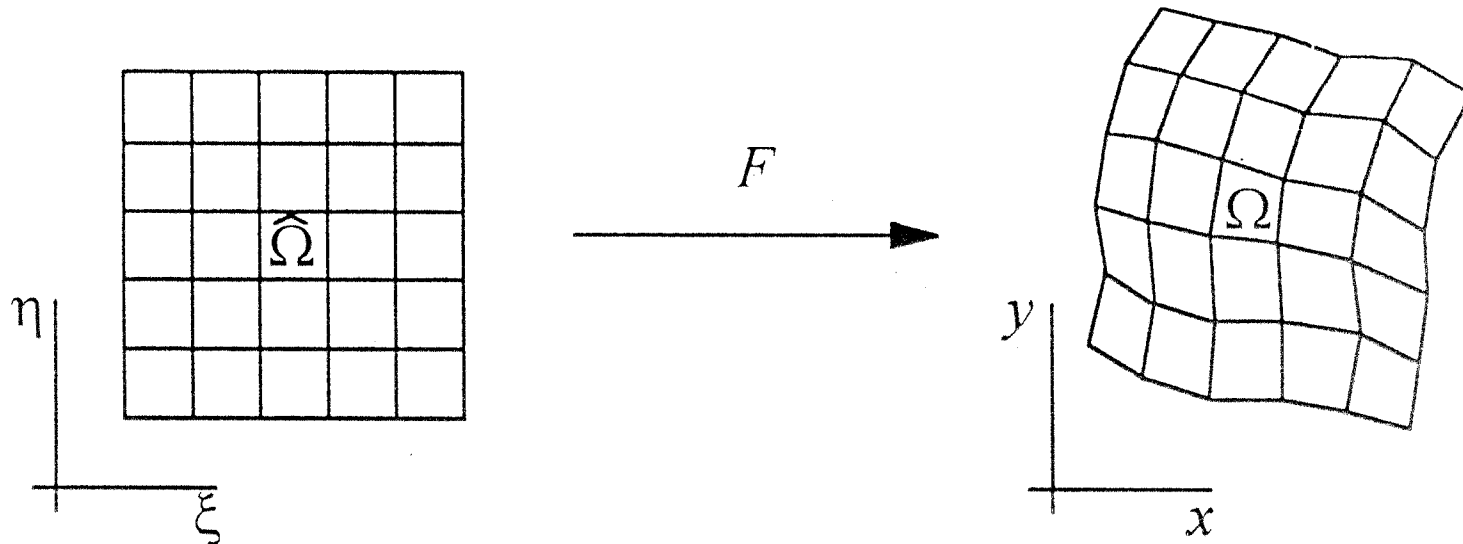
No estructuradas

No hay un patrón fijo de conexión entre elementos; el número de nodos vecinos a uno dado es variable.

Ventajas: Tienen mucha más flexibilidad para adaptarse a dominios con geometrías complicadas, posibilitan el *refinamiento* y *desrefinamiento* local en mayor medida que las estructuradas.

Conceptos generales sobre mallas estructuradas

Los procedimientos de generación de mallas estructuradas están basados en una transformación de coordenadas que establece una aplicación entre una malla canónica de referencia (una malla de un triángulo, un cuadrilátero...., en 2-D, o un tetraedro, un hexaedro..., en 3-D) y la correspondiente malla del dominio real. La transformación $F: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ debe satisfacer los siguientes requisitos generales:



Algunos procedimientos de generación de mallas estructuradas

□ Métodos algebraicos

La transformación de coordenadas se establece explícitamente *a priori*.

□ Métodos basados en la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales

En este caso la transformación se encuentra al resolver un *sistema generador* de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con unas condiciones de contorno apropiadas. La resolución del sistema permite encontrar las coordenadas de un punto $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ del espacio físico en función de las coordenadas ξ , η del espacio lógico; las fronteras del dominio físico corresponden a líneas $\xi = cte$ y

$\eta = cte$. Ejemplo, *sistema generador elíptico*:
$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{cases}$$
 Las funciones de control $P(\xi, \eta)$ y

$Q(\xi, \eta)$ se escogen de manera que nodos de la malla se concentren en las regiones adecuadas.

Algunos procedimientos de generación de mallas no estructuradas

Triangulación de Delaunay.

Triangulación de óptima calidad en 2-D para un conjunto de puntos dado.

Avance Frontal.

Construye la malla a partir de la triangulación de la frontera del dominio.

Mallas Encajadas.

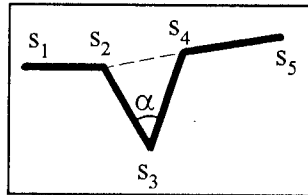
Necesita una triangulación inicial del dominio (malla base).

Muy adecuada para el refinamiento/desrefinamiento local.

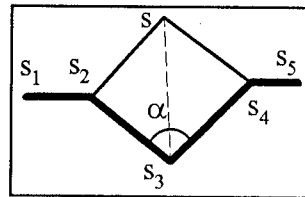
Facilidad en la aplicación del método multimalla.

Generación de mallas no estructuradas. Avance frontal en 2-D

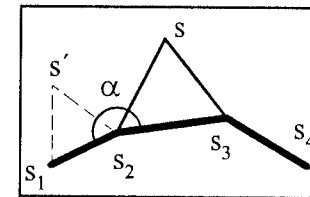
- El frente inicial F se define como el conjunto de segmentos de la frontera del dominio.
- Creación de nuevos elementos a partir del frente actual. Dependiendo del valor del ángulo α , los nuevos triángulos y puntos se crean atendiendo a uno de los tres patrones siguientes:



$$\alpha < \pi/2$$



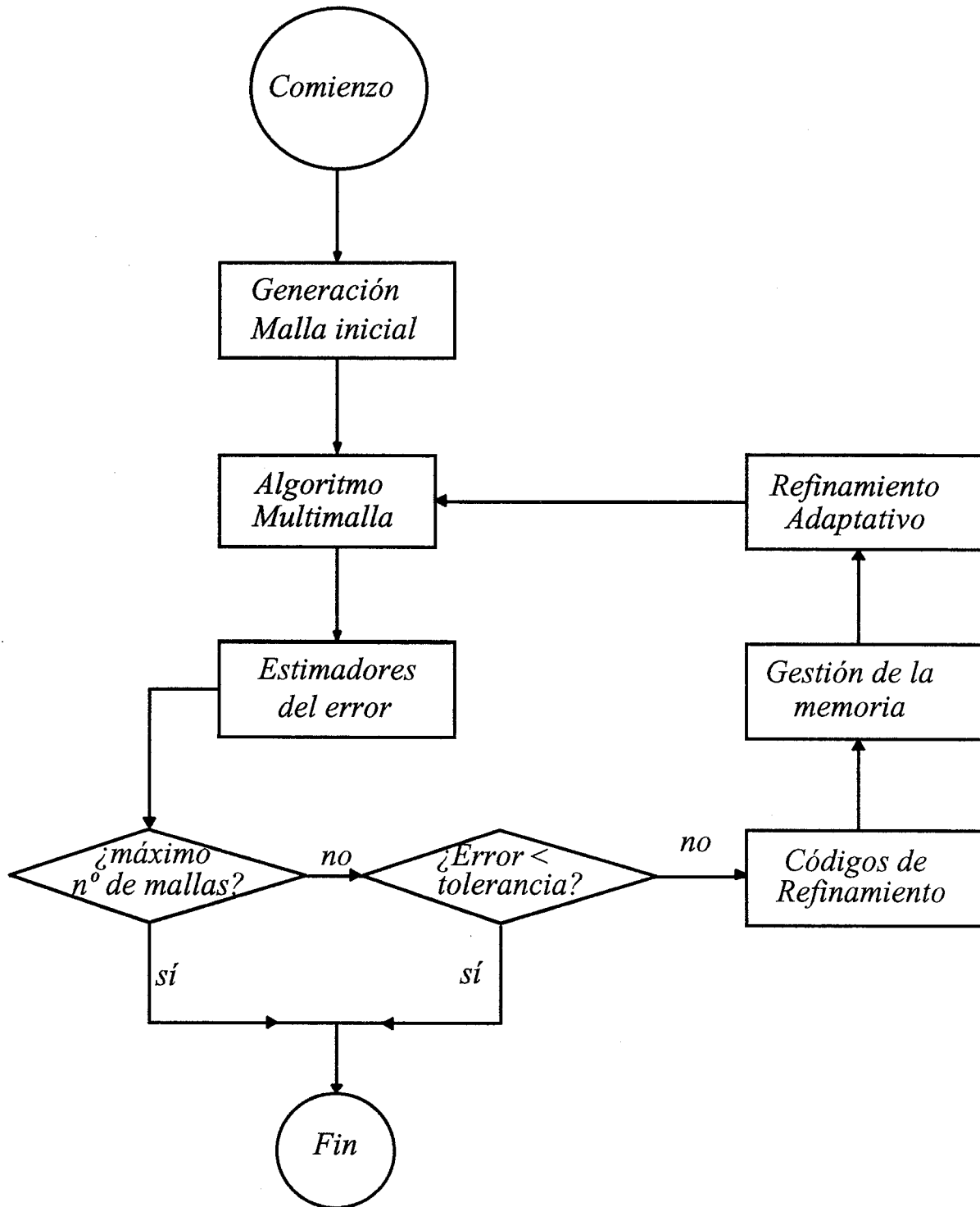
$$\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi/3$$



$$2\pi/3 < \alpha$$

- Actualización del frente. Un nuevo frente se forma suprimiendo los segmentos del presente frente *encerrados* por los nuevos triángulos y añadiendo los *no encerrados* que restan.
- El proceso se repite hasta que el frente se reduce al conjunto vacío.

Código Adaptable



Estrategia Adaptable

- ❑ Indicador de error para el refinamiento local:

$$\varepsilon_i = h_i^q \left| \vec{\nabla} u_h \right| \quad \text{donde consideramos } q = 1 \text{ ó } 2$$

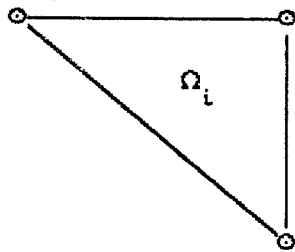
- ❑ Refinamos aquellos elementos en los que:

$$\varepsilon_i \geq \gamma \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}}(\varepsilon_j) \quad \text{donde } \gamma \in [0,1]$$

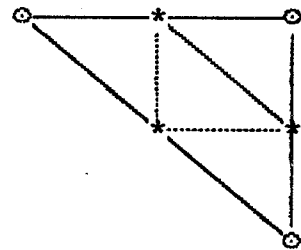
* ESTRATEGIAS DE REFINAMIENTO *

REFINAMIENTO DE UN ELEMENTO

* OPCION 1:

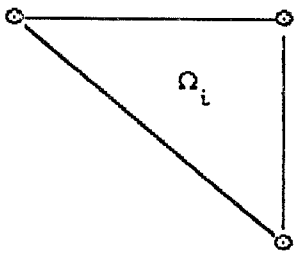


M_n

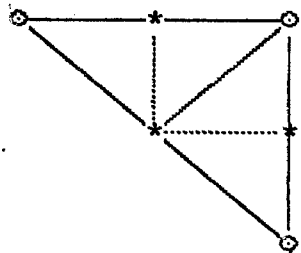


M_{n+1}

* OPCION 2:



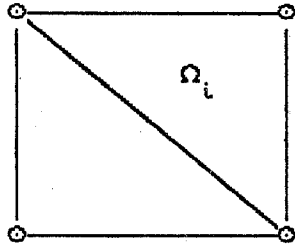
M_n



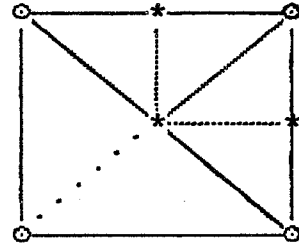
M_{n+1}

TIPOS DE REFINAMIENTOS ADICIONALES

a) Caso de nodo libre en lado mayor:

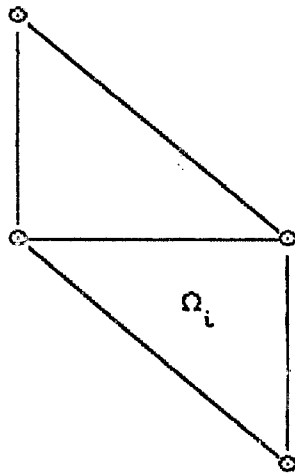


M_n

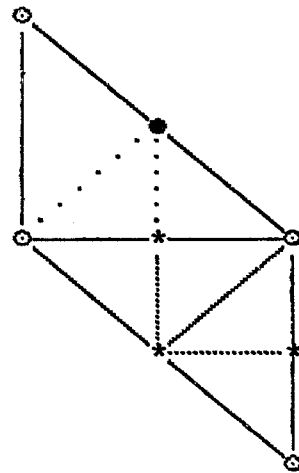


M_{n+1}

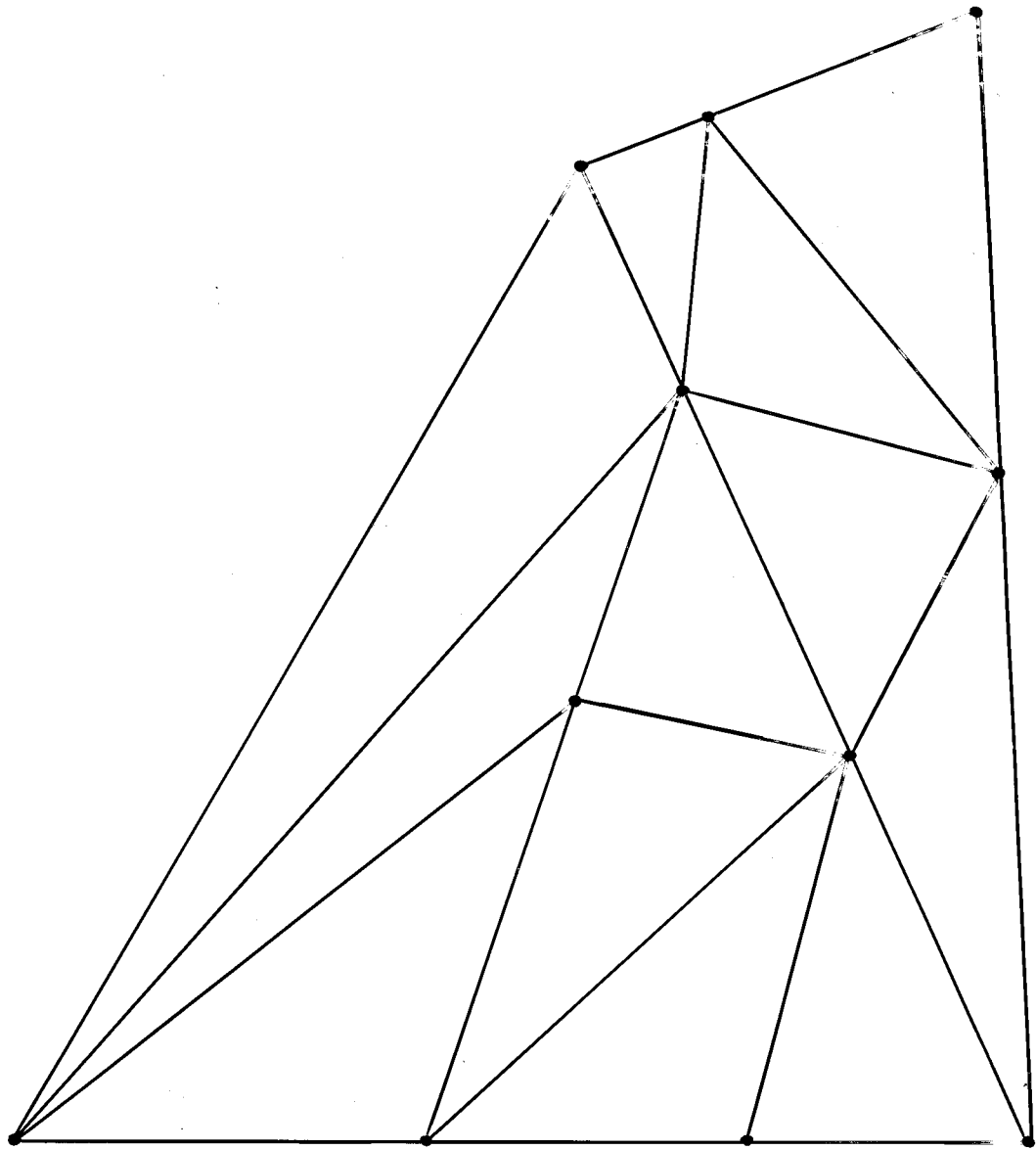
b) Caso de nodo libre en un lado distinto al mayor:



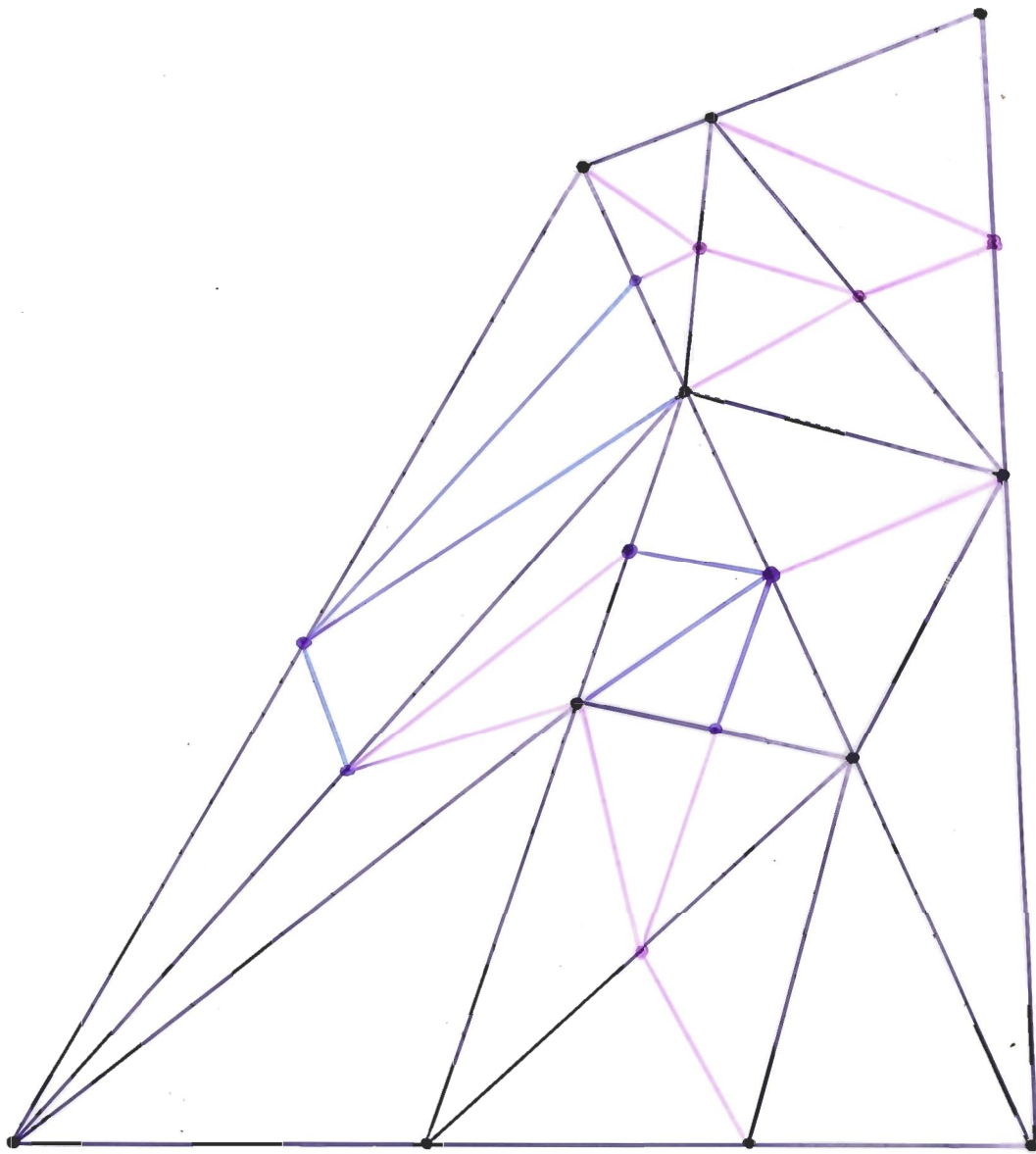
M_n



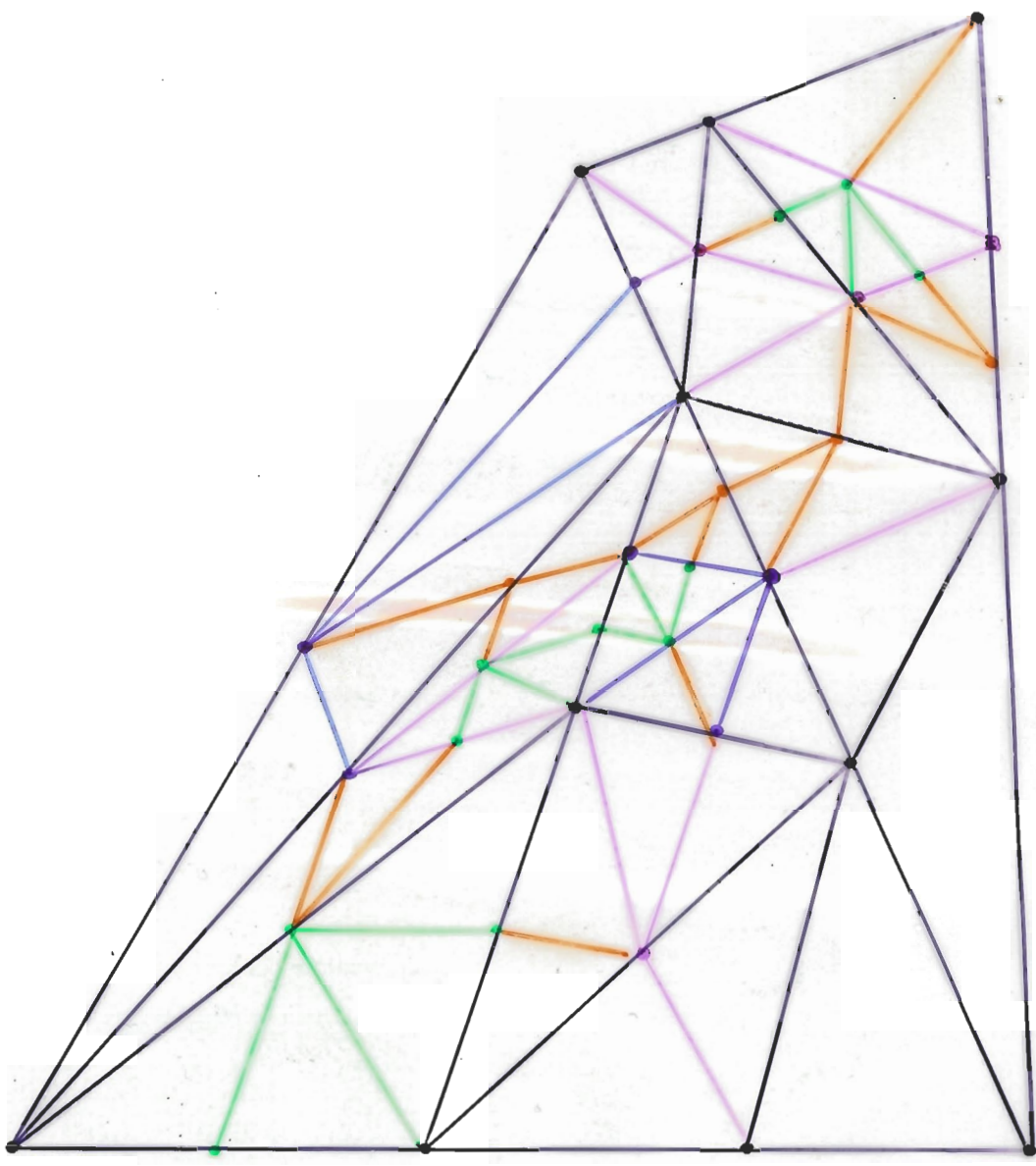
M_{n+1}



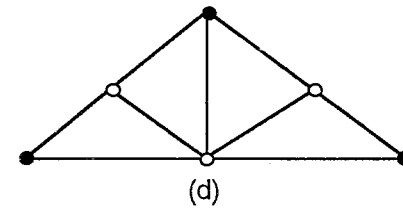
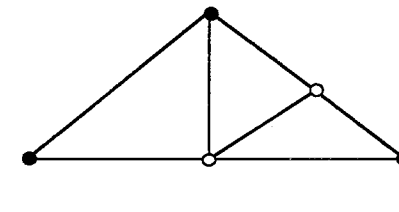
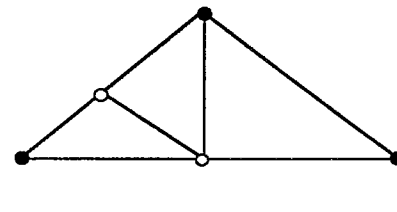
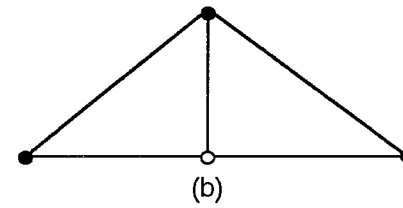
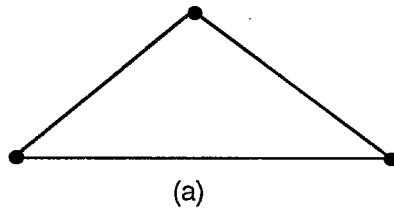
* MALLA 1 *



* МАЛЛА 21 *

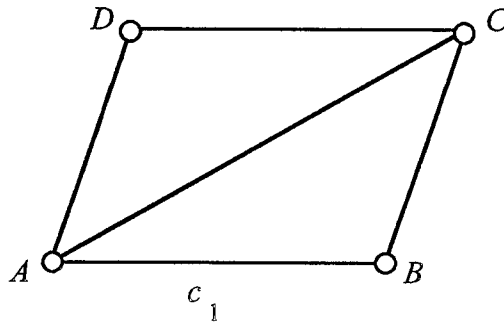


División de un Triángulo

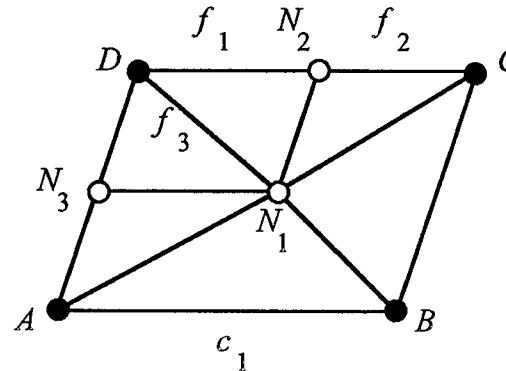


Definiciones y Propiedades

Nivel τ_{j-1}

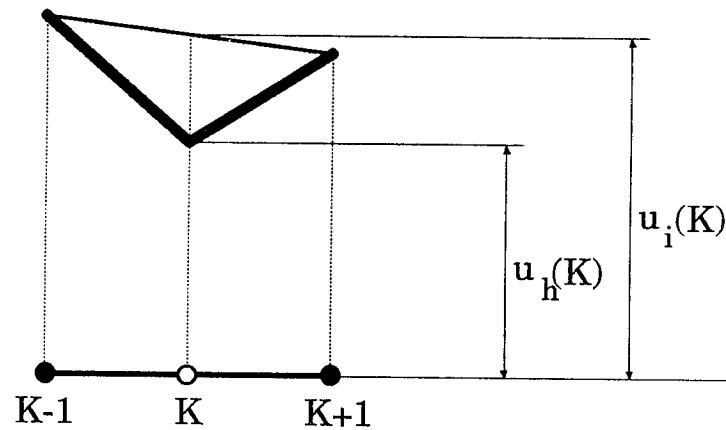
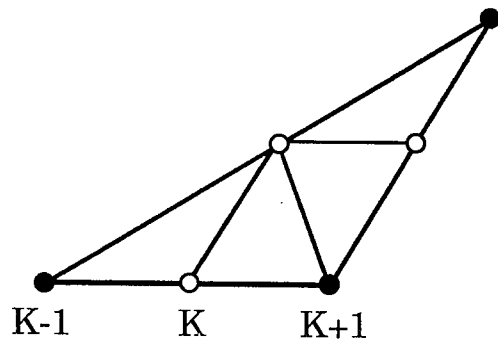


Nivel τ_j



- Nodos, aristas y elementos *propios* y *heredados*.
- Historia o Genealogía de la malla:
 - Aristas y elementos *padres* e *hijos*.
 - Aristas *externas* e *internas*.
- ⇒ Cualquier elemento propio de τ_{j-1} es heredado en τ_j , o tiene sus hijos en τ_j .
- ⇒ Si un elemento no tiene hijos, entonces pertenece a la malla más fina.
- ⇒ Sólo aquellos elementos sin sucesores pueden ser eliminados.

Condición de Desrefinamiento



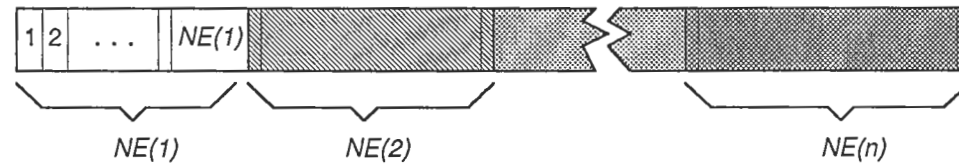
En principio, el nodo propio K puede ser eliminado si:

$$|u_h(K) - u_i(K)| \leq \varepsilon \quad \text{ó} \quad |u_h(K) - u_i(K)| \leq \varepsilon |u_h(K)|$$

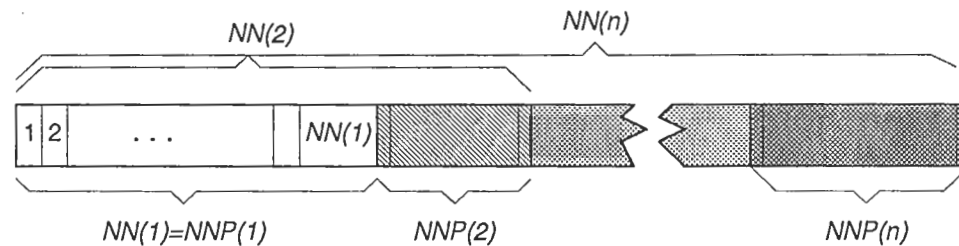
Estructura de Datos

□ VECTORES DE ESTRUCTURA:

(a) Vector para elementos, *IMELEM*; análogamente para aristas, *IMFACE*.



(b) Vector para nodos *IMNODE(1:NUMP)*.



□ VECTORES DE GENEALOGÍA:

(a) Vector para aristas: *IR[1:3,1:NUMF]* (b) Vector para elementos: *IXH[1:6,1:NUMEL]*

□ VECTORES DE NIVEL o INDICADORES DE DESREFINAMIENTO:

NODES(1:NUMN), *NFACES(1:NUMF)* y *NELES(1:NUMEL)*.

□ VECTORES DEL SACO: *NNSAC(*)*, *NFSAC(*)* y *NESAC(*)*

□ ARISTA-ENTORNO: *IEX(1:NUMN)*

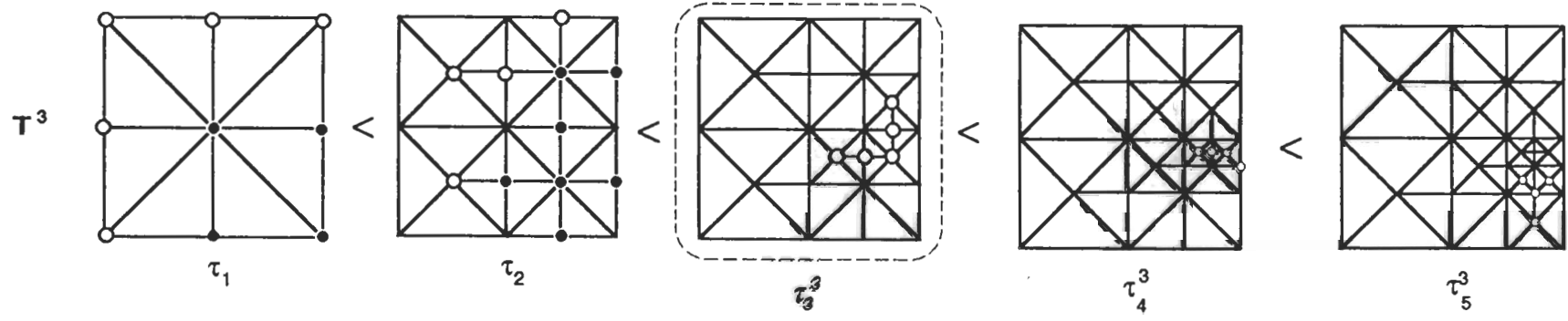
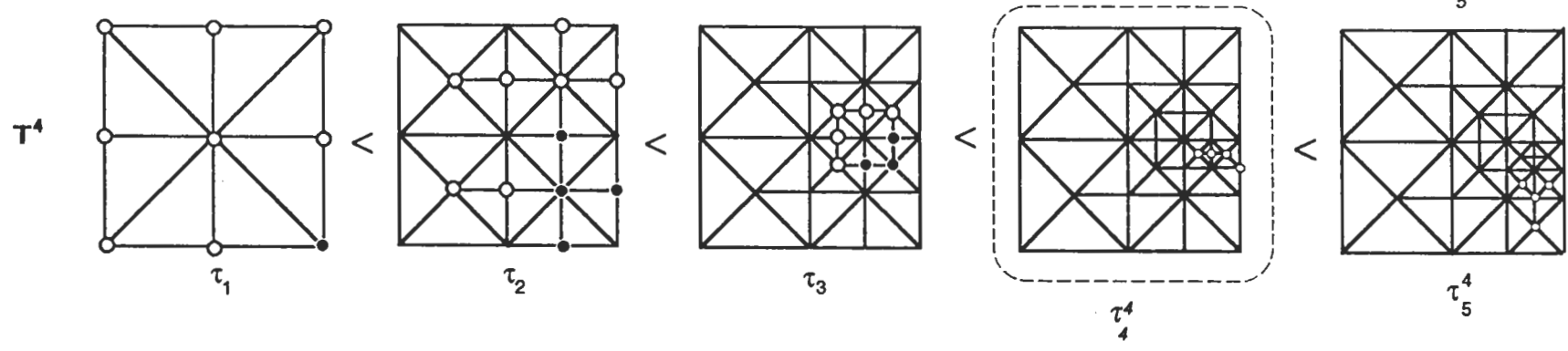
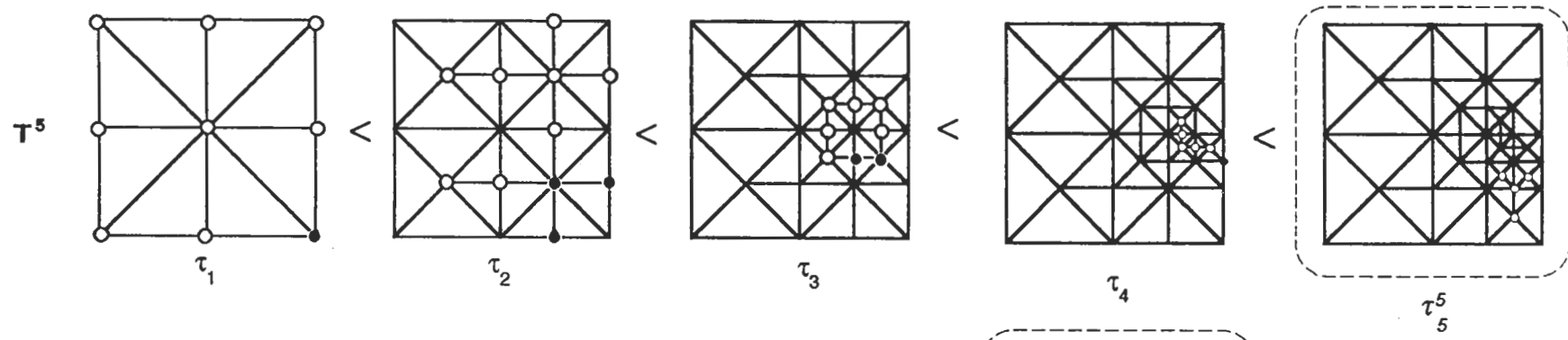
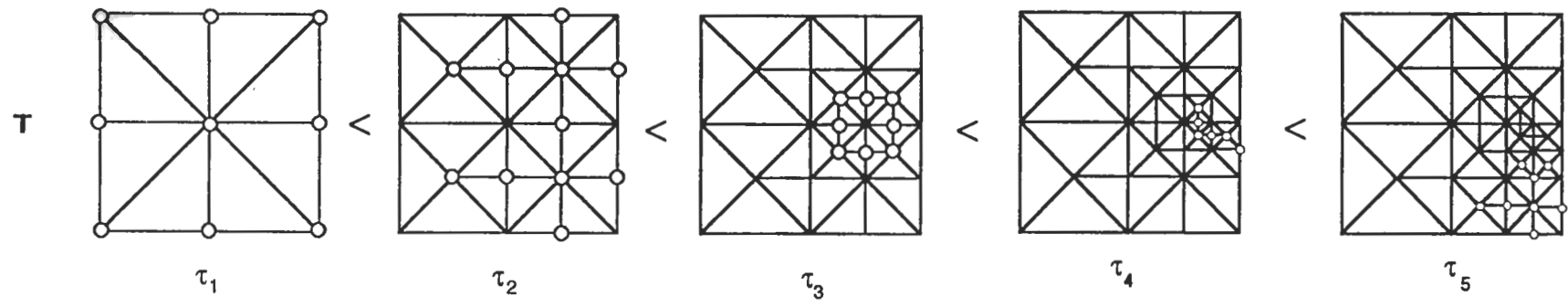
EL ALGORITMO DE DESREFINAMIENTO

ENTRADA: Secuencia $T = \{ \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \}$

Bucle en niveles de T ; Para $j = n$ hasta 2, hace:

1. Se recorren los nodos propios de τ_j y se evalúa la *condición de desrefinamiento*.
2. Se asegura la *conformidad* de la malla que se está creando.
- 3.a. Si algún nodo propio de τ_j debe ser eliminado,
 - 3.a.1. Si algún nodo propio de τ_j debe permanecer,
Se definen *Nuevas conexiones nodales* para el nuevo nivel τ_j^j .
 - 3.a.2. En caso contrario,
Se elimina el *nivel j* de los vectores de estructura.
- 3.b. Si todos los nodos propios de τ_j permanecen, no se modifica el nivel: $\tau_j^j = \tau_j$.
4. Los *cambios se heredan* a los siguientes niveles de malla.
5. Se obtiene una nueva secuencia $T^j = \{ \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{j-1} < \tau_j^j < \dots < \tau_n^j \}$.

SALIDA: Secuencia desrefinada $T' = \{ \tau_1 < \tau_2' < \dots < \tau_m' \}$



Conforming procedure

INPUT ($\tau_j, \tau_{j-1}, \text{Nodes}$)

While *Conformity* must be assured:

For each $t \in \tau_{j-1}$:

 If t is 1/2-non-conforming:

 Change the derefinement indicator for the node P of its
 longest side.

 Assure *conformity*.

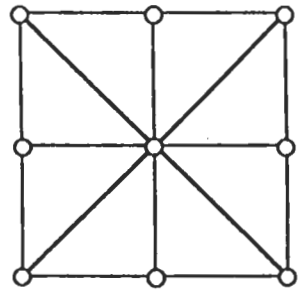
 End if.

End for.

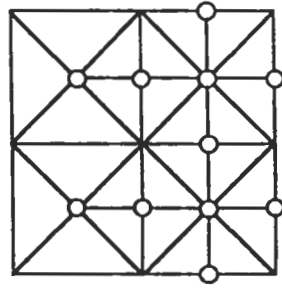
End While.

OUTPUT ($\tau_j, \tau_{j-1}, \text{Nodes}$)

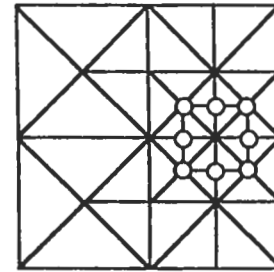
CONFORMITY OF THE MESH



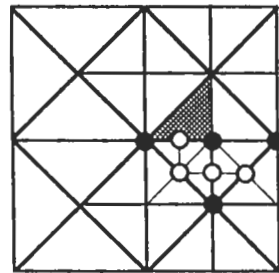
(a) mesh 1



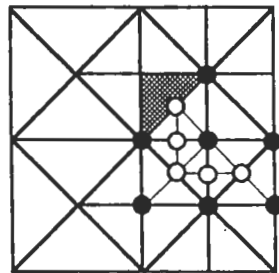
(b) mesh 2



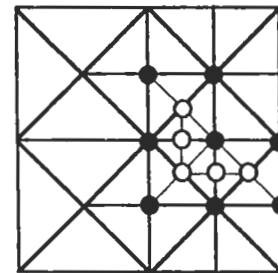
(c) mesh 3



(d) 1st. iteration



(e) 2nd. iteration



(f) 3th. iteration

- (a),(b) and (c) sequence of nested meshes. Proper nodes are pointing out.
- (d), (e) and (f) iterations to obtain the conformity (with the derefinement indicators) of the arising mesh τ_3^3

New Conforming procedure

INPUT ($\tau_j, \tau_{j-1}, \text{Nodes}$)

For each proper node $N \in \tau_j$:

Let c be the surrounding edge of N .

For each neighboring element t of c do:

If t is 1/2-non-conforming:

* Change the derefinement vector Nodes for the node P of its longest side.

* Change the derefinement vector Nodes for some nodes of t .

End if.

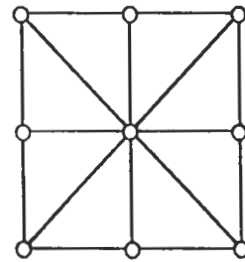
End for.

End for.

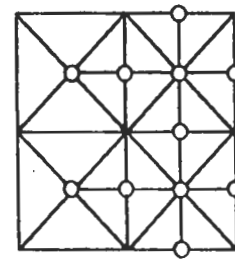
OUTPUT ($\tau_j, \tau_{j-1}, \text{Nodes}$)

CONFORMITY OF THE ARISING NEW MESH

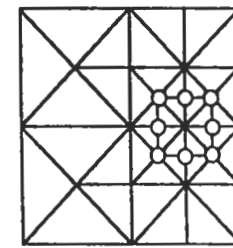
(by means of the new procedure)



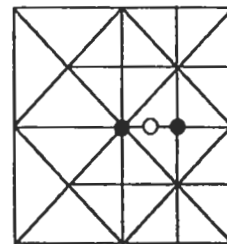
(a) mesh 1



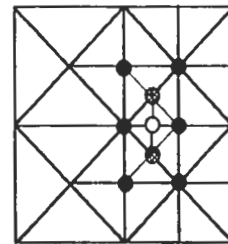
(b) mesh 2



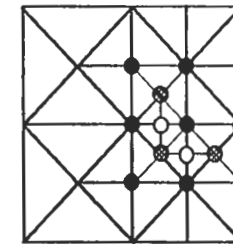
(c) mesh 3



(d) one node remains



(e) Conformity



(f) other node

- (a),(b) and (c) sequence of nested meshes. Proper nodes are pointing out.
- (d), (e) and (f) shaded nodes mean proper nodes that will stay according to the conformity of the mesh.

EFFICIENCY AND COMPLEXITY

Loop in levels of mesh: n

1.- Derefinement condition: $O(NNP(j))$

2.- Assure conformity: $O(NNP(j))$

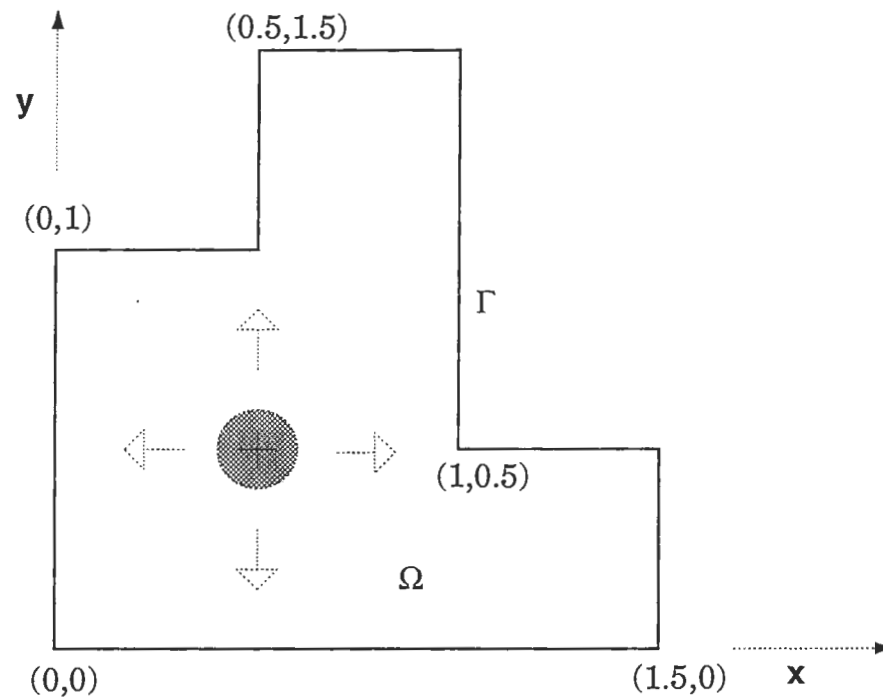
3.- Definition of the new nodal connections: $O(NN)$

4.- Changes are inherited: $O(n \cdot NN)$

Total:

$$O(NN + NN + n \cdot NN + n^2 \cdot NN) = O(NN + n \cdot NN + n^2 \cdot NN) = O(n^2 \cdot NN)$$

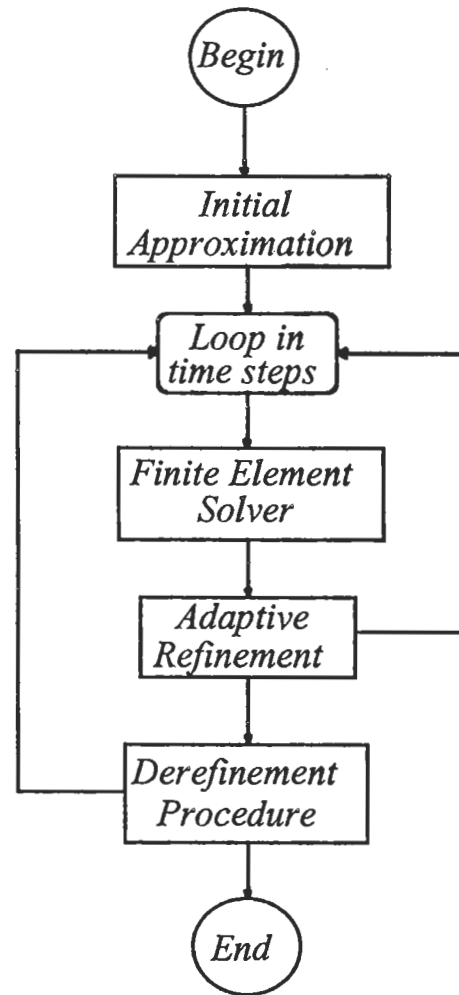
A QUASI-EVOLUTIVE PROBLEM

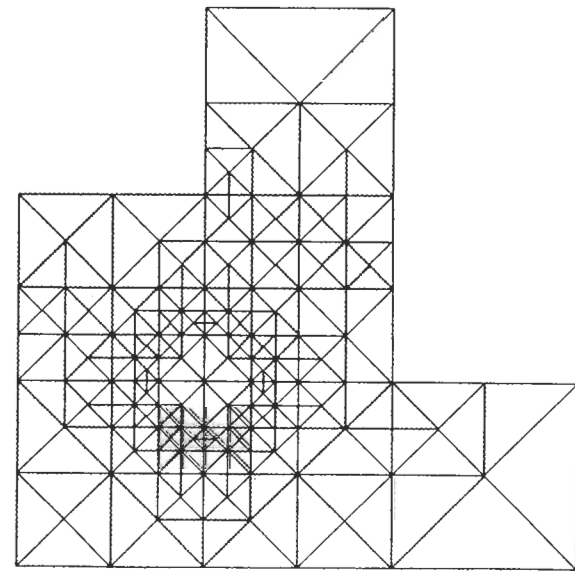
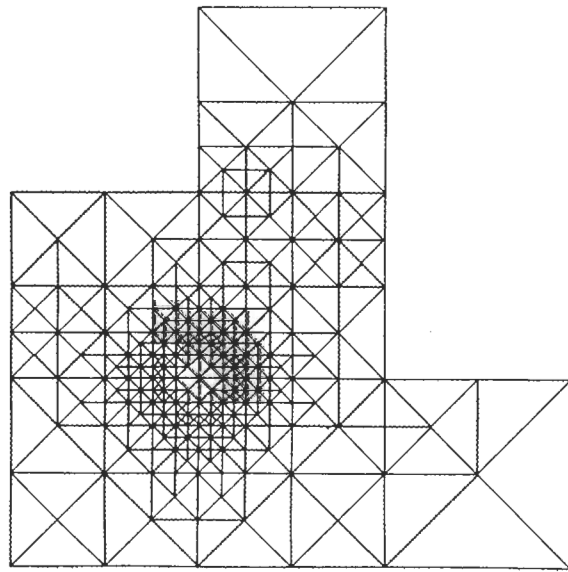
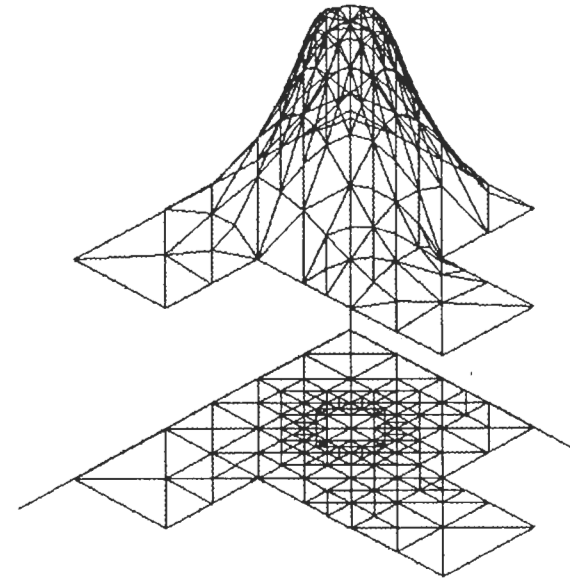
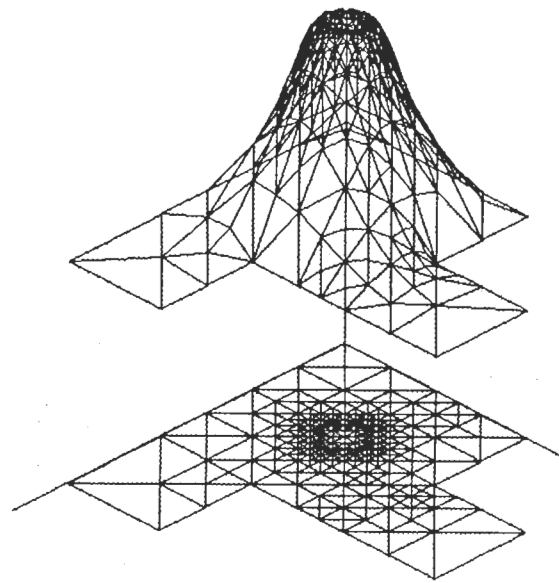


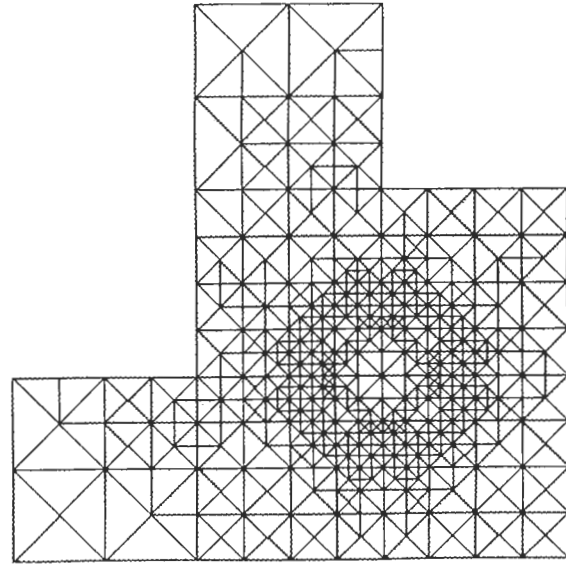
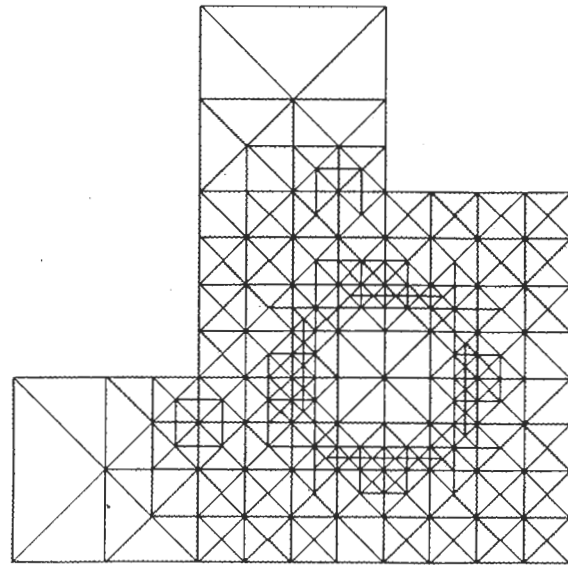
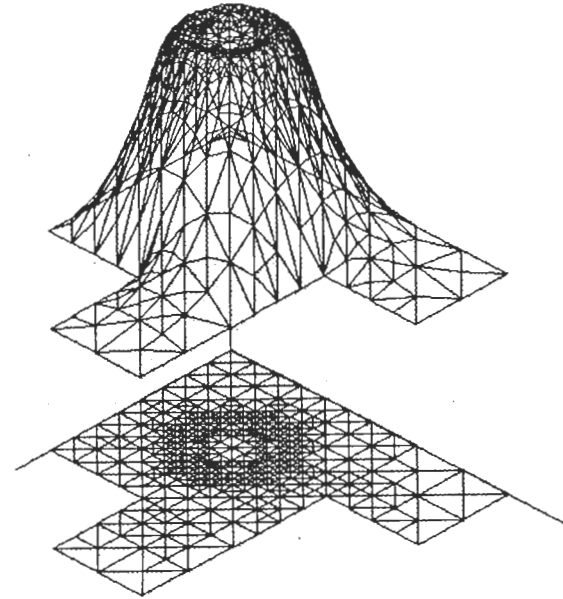
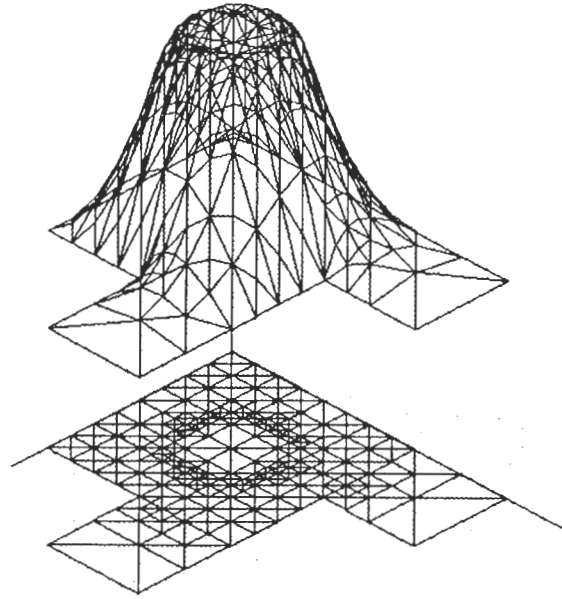
$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u = 1 \text{ in } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right\} \text{ where } f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } d > r_1(t) \\ 50 & \text{if } r_2(t) < d < r_1(t) \\ -5 & \text{if } d < r_2(t) \end{cases} \text{ and } \begin{cases} d(x,y) = [(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2]^{\frac{1}{2}} \\ r_1(t) = 0.1(1+t) \\ r_2(t) = 0.1t \end{cases}$$

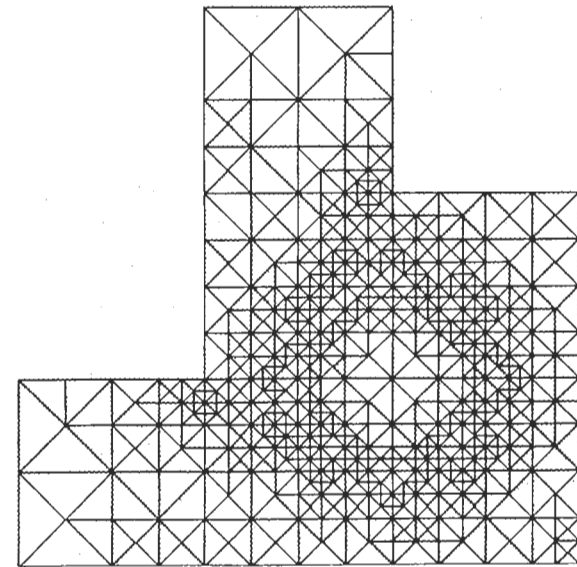
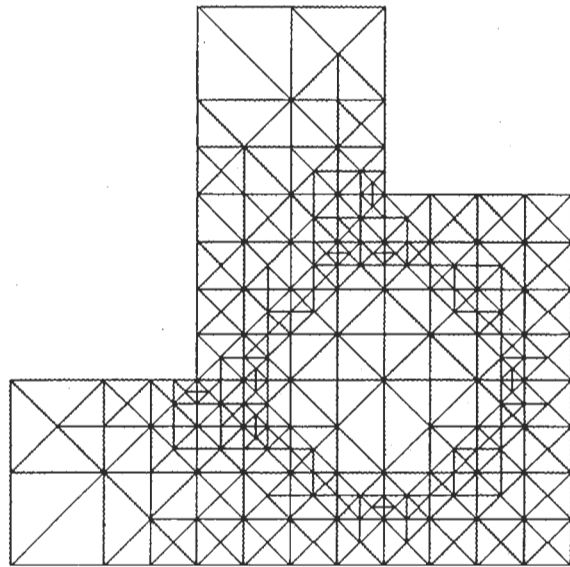
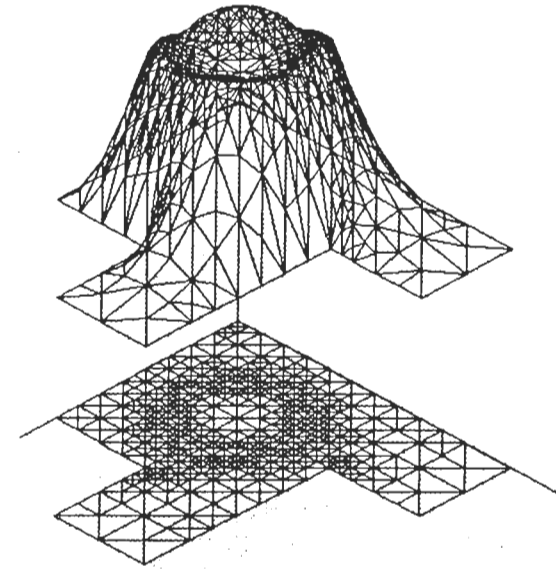
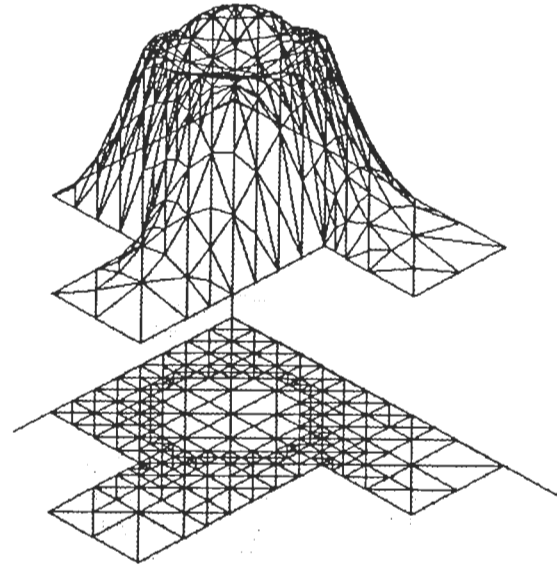
THE READAPTIVE PROCESS

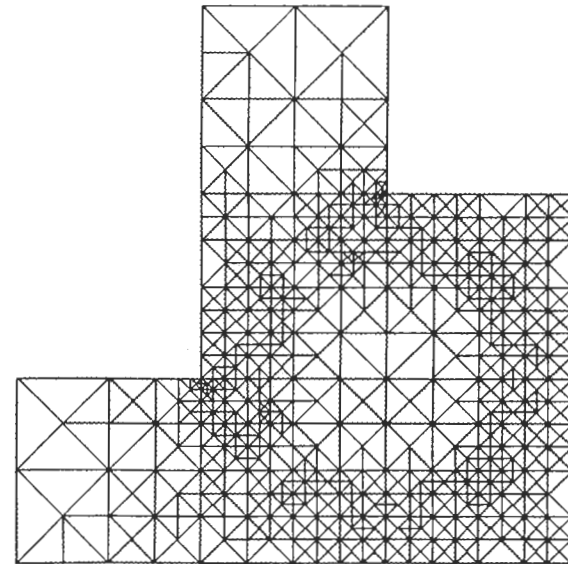
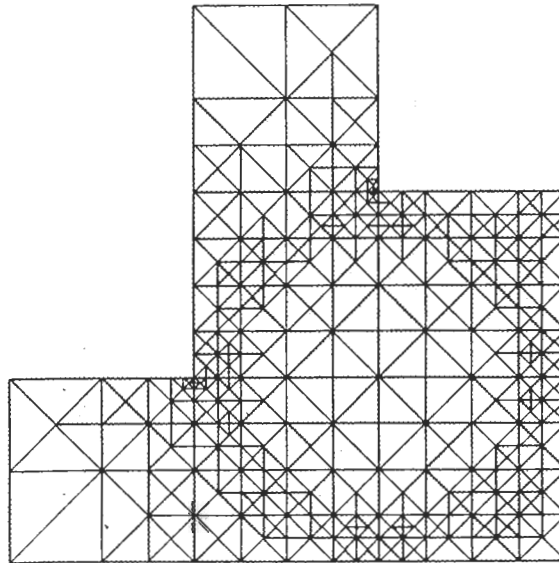
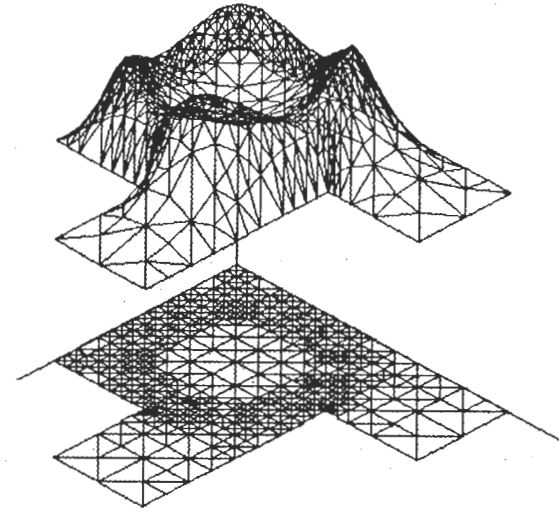
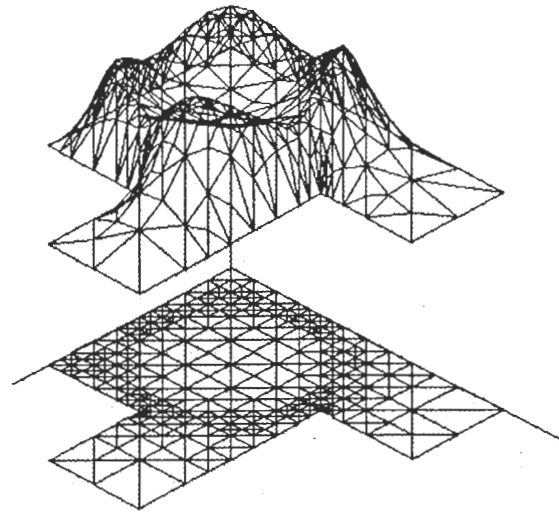
General Aspects

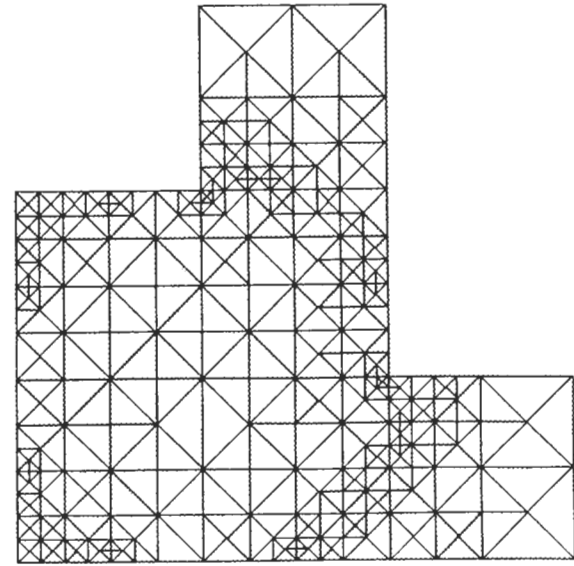
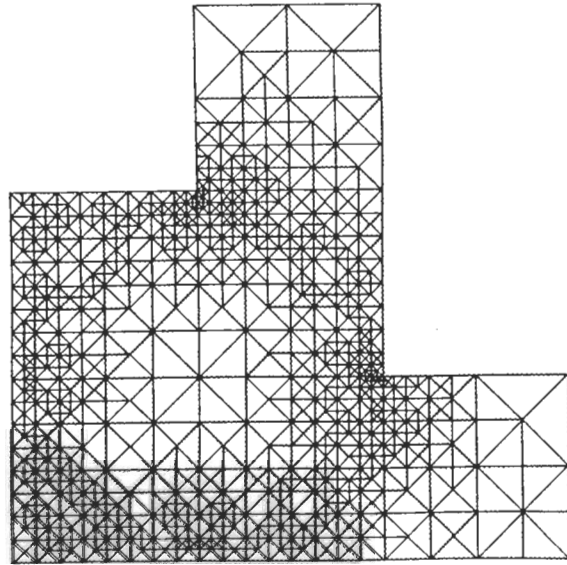
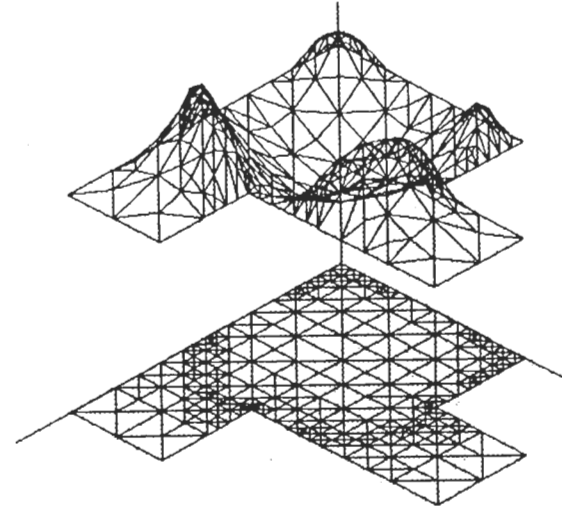
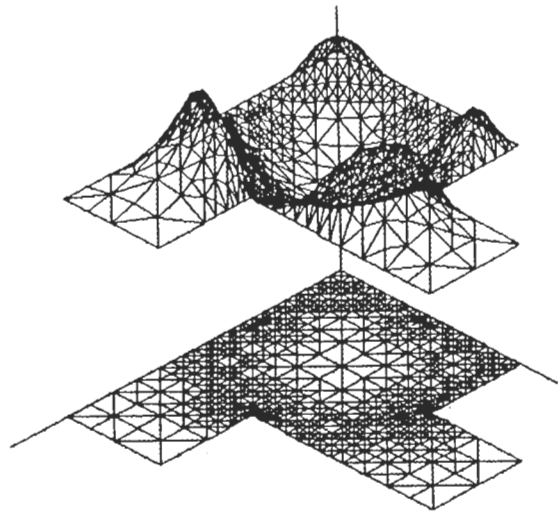


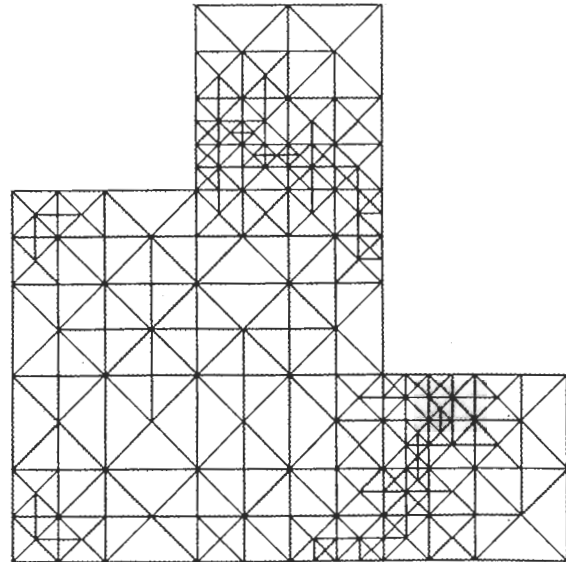
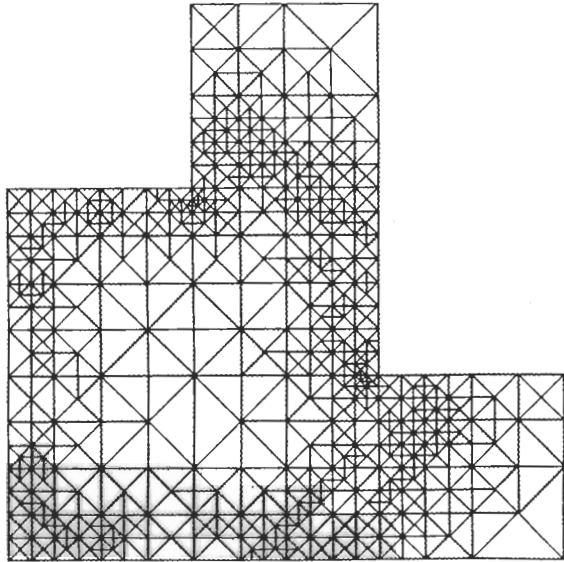
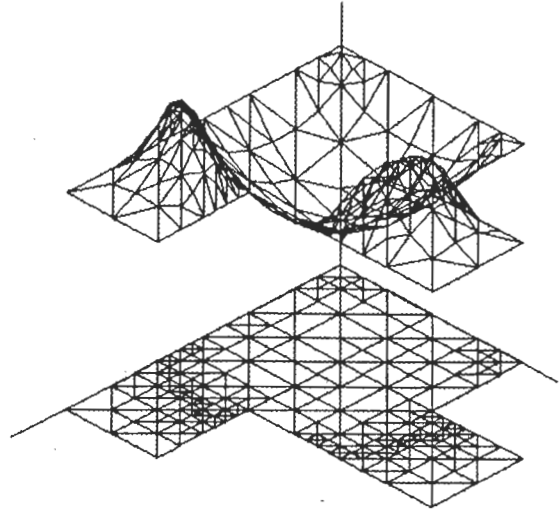
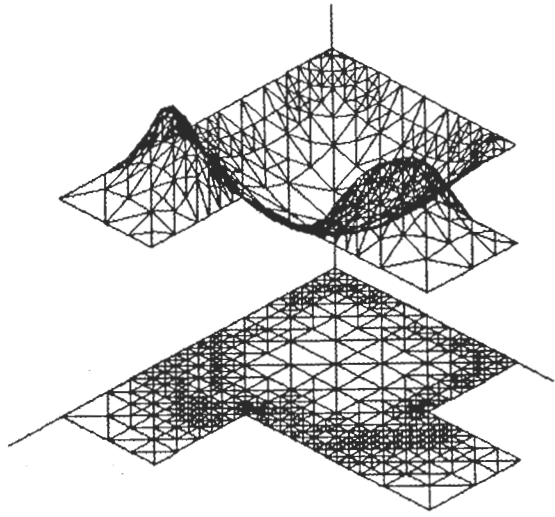


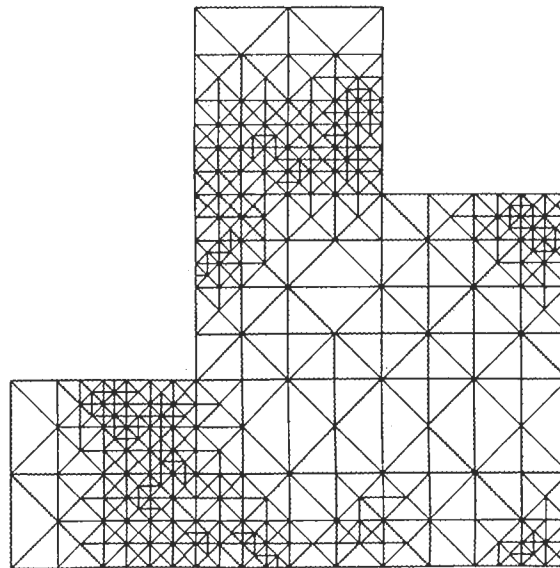
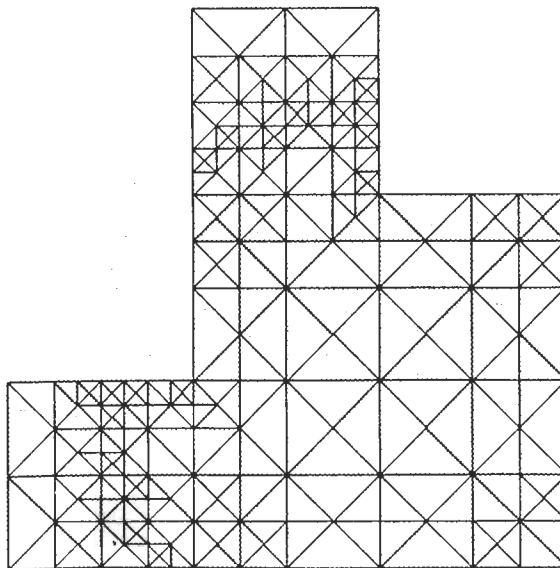
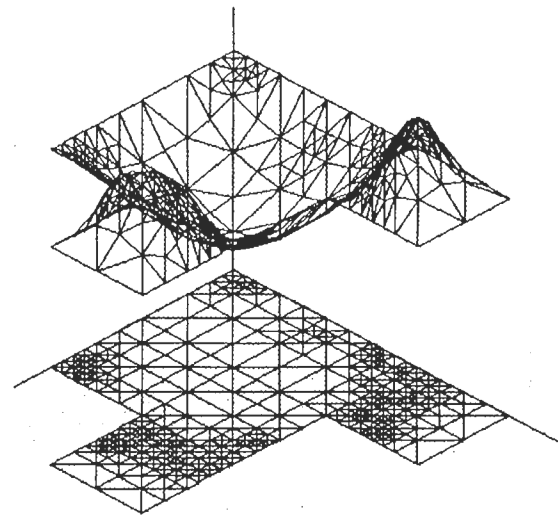
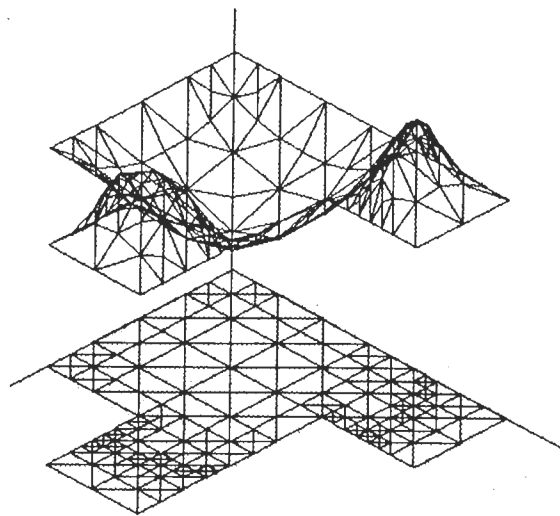


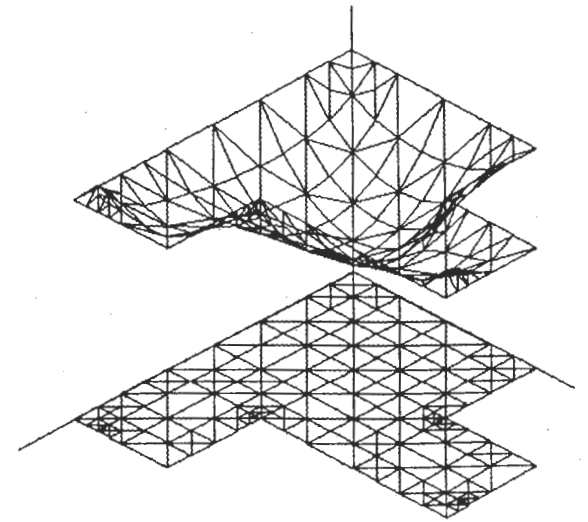
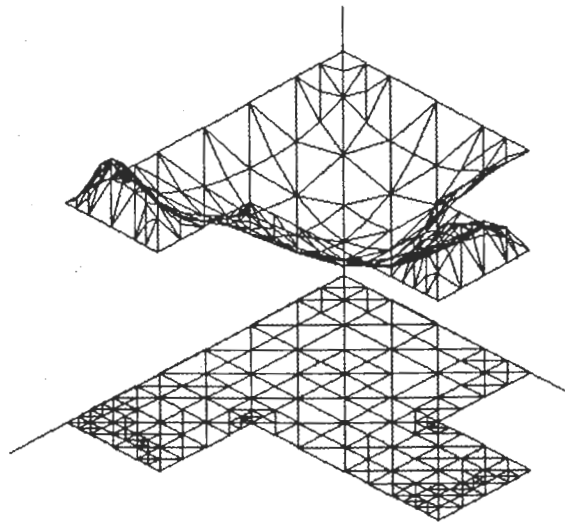
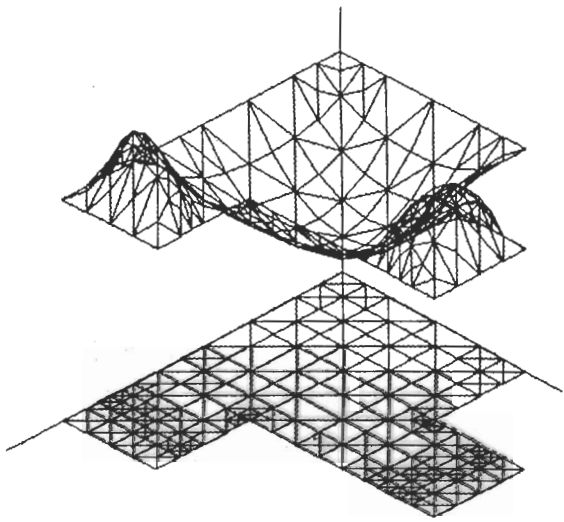
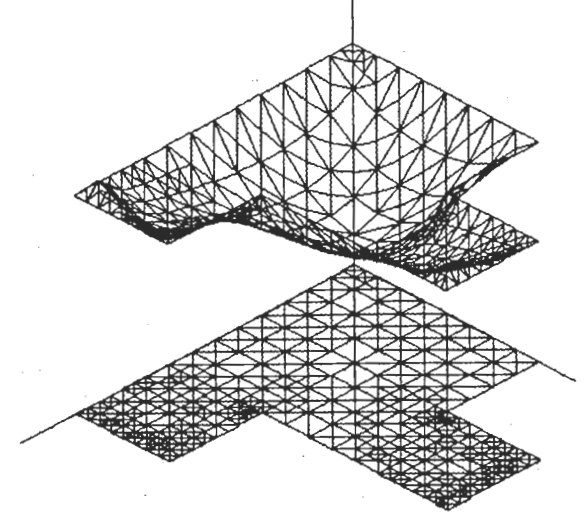
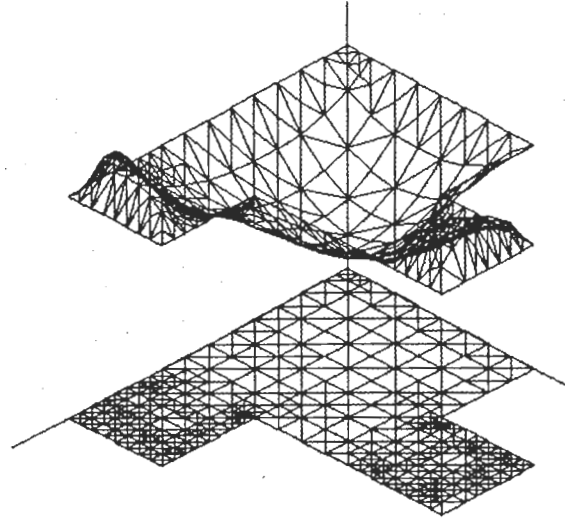
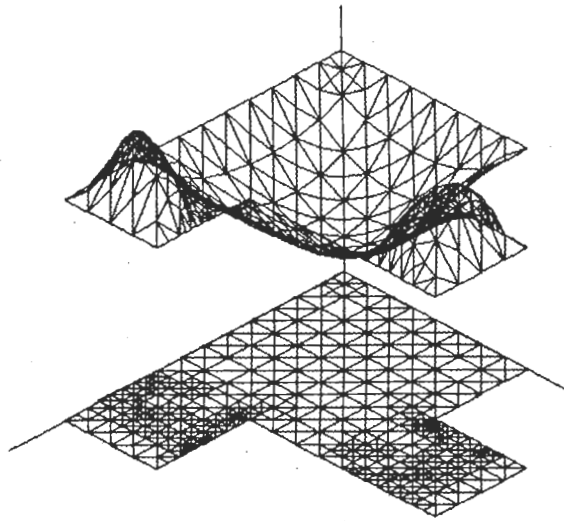


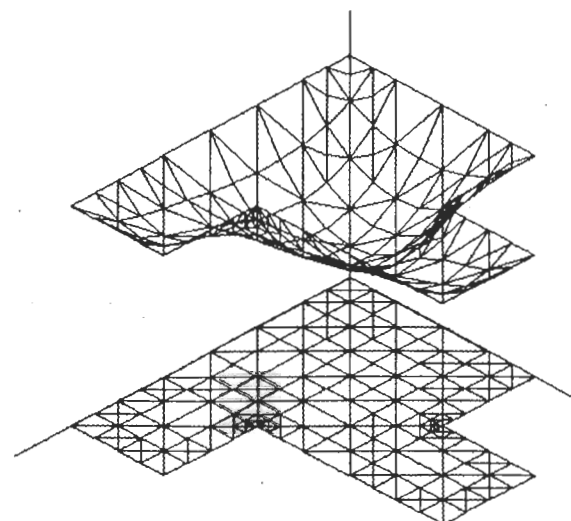
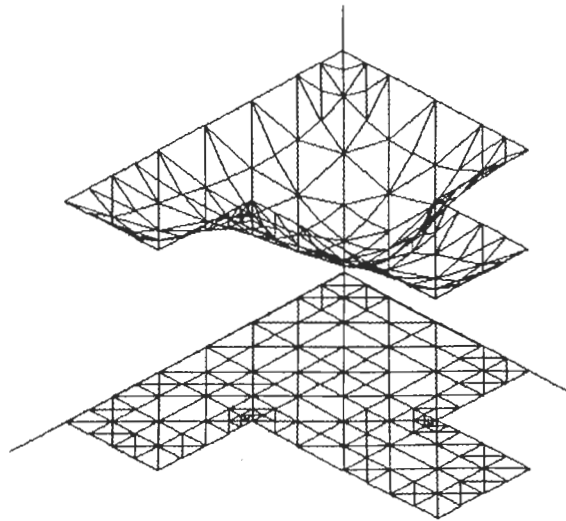
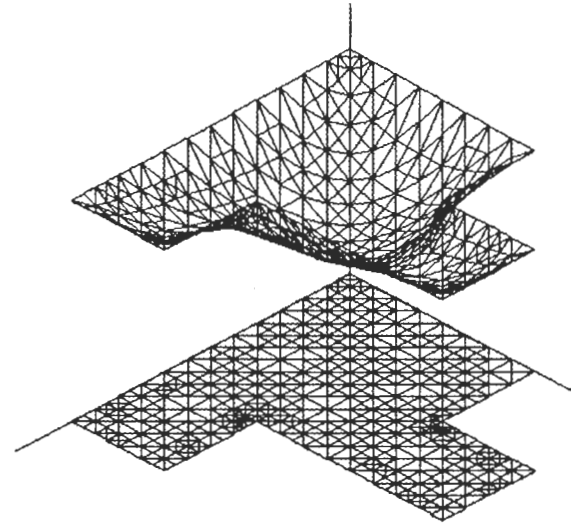
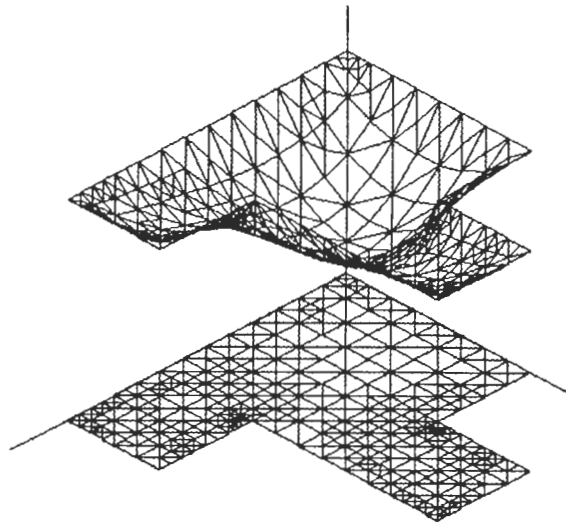






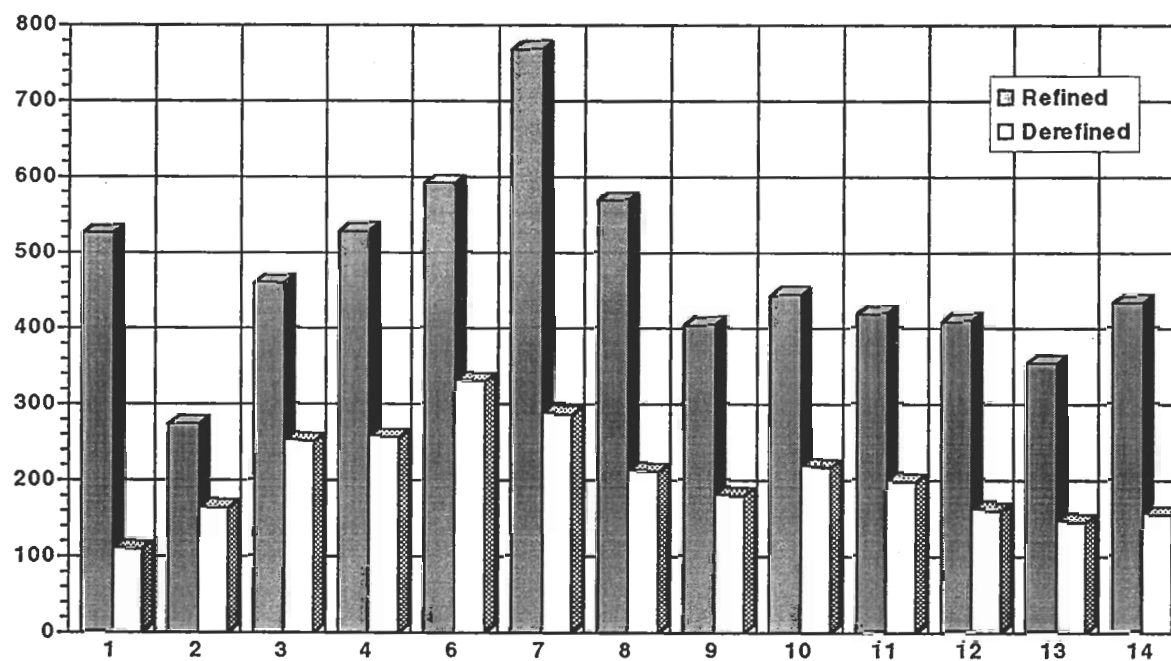






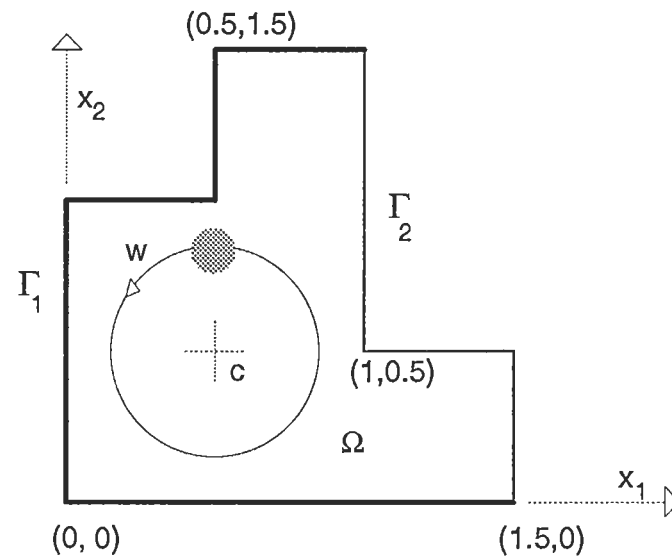
REFINED AND DEREFINED MESHES

NODES



TIME STEP

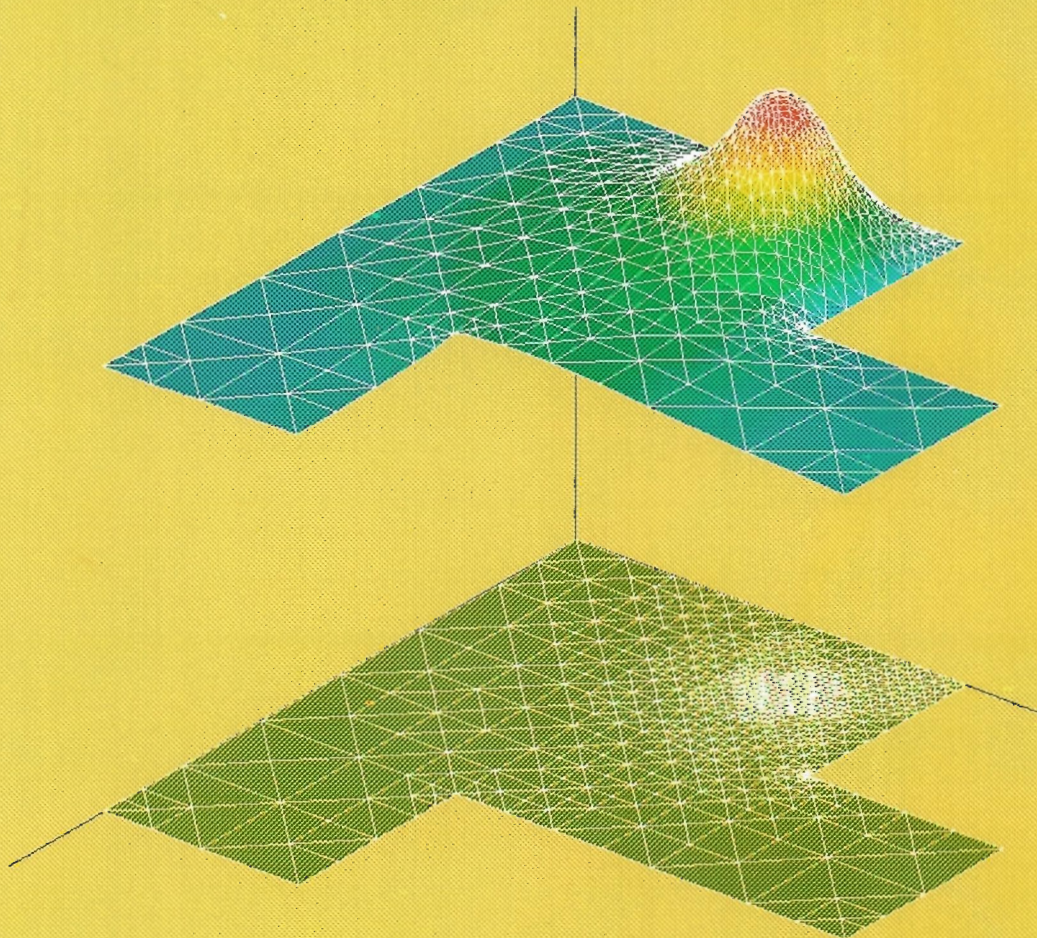
Un Problema de Poisson Quasi-Estacionario



$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 40 & \text{if } d(t) < r \\ 0 & \text{if } d(t) > r \end{cases}$$

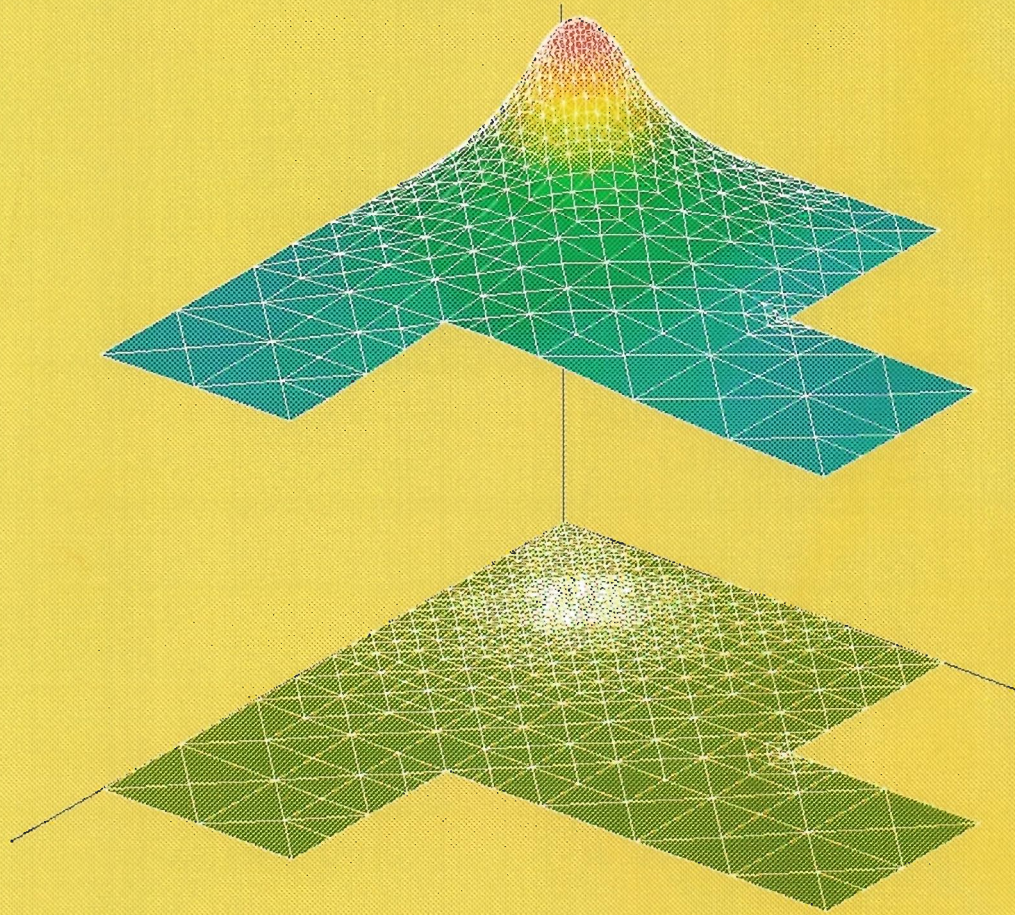
$$\omega = (\pi/4) \text{ rad/seg}$$

PROBLEMA QUASI-EVOLUTIVO



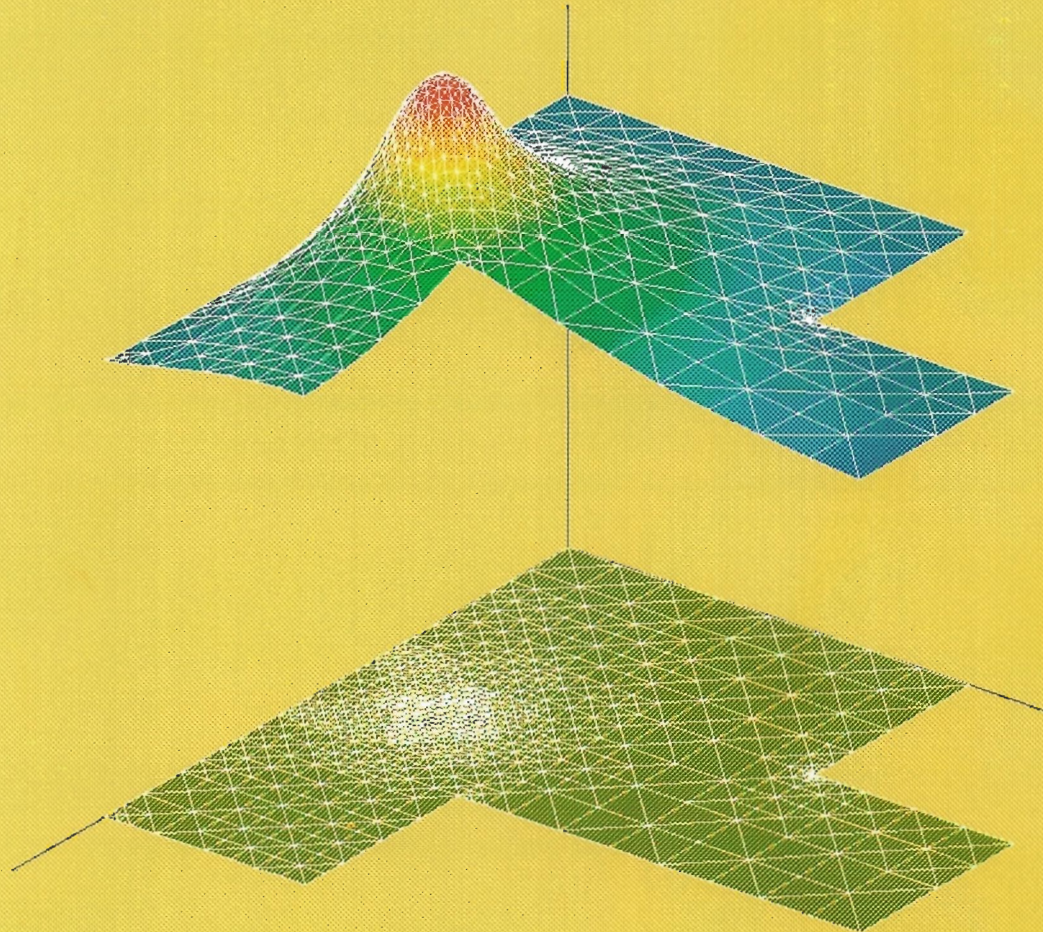
t=1; 838 nodos

PROBLEMA QUASI-EVOLUTIVO



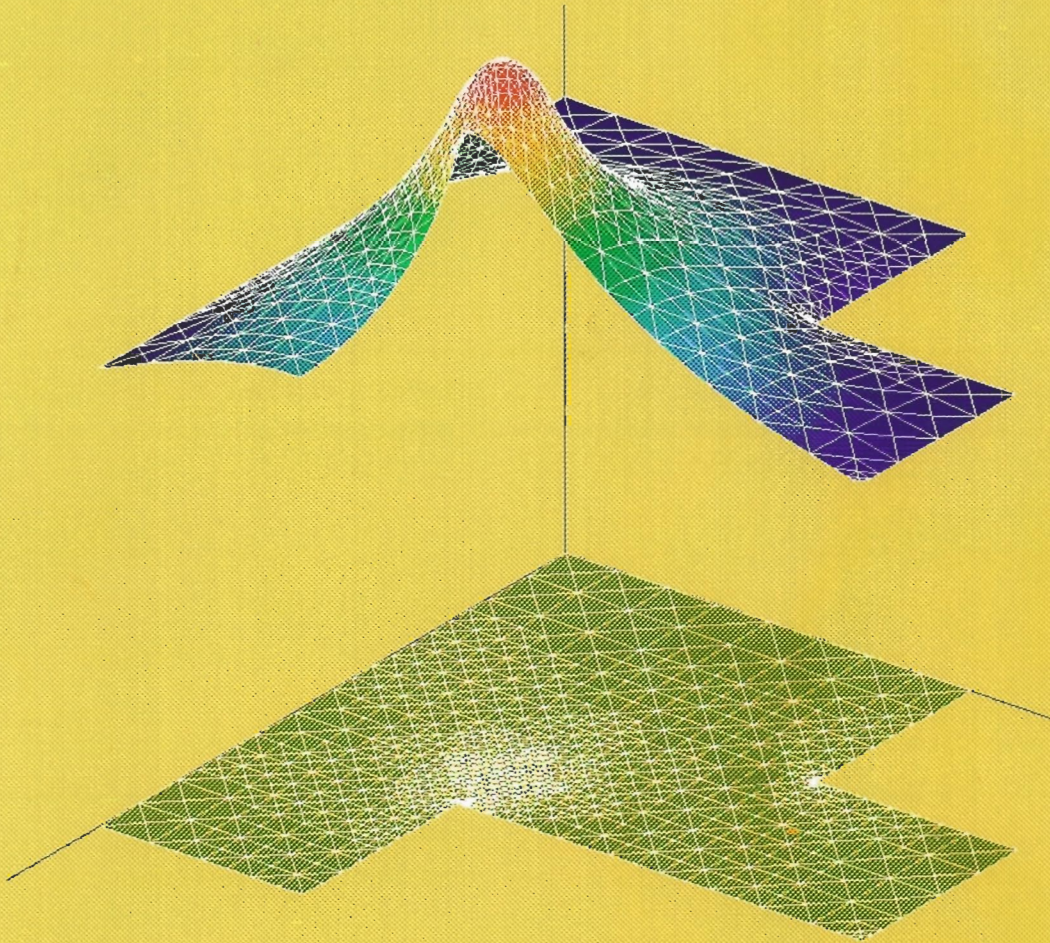
t=3; 812 nodos

PROBLEMA QUASI-EVOLUTIVO



$t=5$; 821 nodos

PROBLEMA QUASI-EVOLUTIVO



t=6; 892 nodos